**В.Ф. Бутузов**

# Лекции по математическому анализу

**Часть I**

Москва 2012

Бутузов В. Ф.
**Лекции по математическому анализу. Часть I.**

Учебное пособие содержит первую часть курса лекций по математическому анализу, которая излагается в I семестре. В этой части рассматриваются основные вопросы курса математического анализа одной переменной. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением иллюстрирующих примеров, особое внимание обращается на приложения математических понятий и утверждений в физике.

Пособие рассчитано на студентов 1 курса физического факультета и преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу.

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *Ю.П. Пытьев,*
д.ф.-м. н., профессор *Б.И. Садовников*

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Предисловие

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения курса лекций по математическому анализу. В нем содержится первая часть курса, которая излагается на лекциях в I семестре. В этой части рассматриваются основные вопросы математического анализа функций одной переменной. Теоретический материал сопровождается иллюстрирующими примерами, особое внимание уделяется приложениям математических понятий и утверждений в физике. По ходу изложения читателю предлагаются небольшие задания.

Пособие полностью соответствует действующей программе курса математического анализа, представленный в нем материал минимизирован таким образом, что его можно реально изложить на лекциях в течение семестра при трех часах лекций в неделю. Это отличает пособие от других известных учебников по математическому анализу для физических специальностей, в которых наряду с основным материалом содержатся дополнительные разделы.

Пособие рассчитано на студентов 1 курса физического факультета и преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу. Оно может быть использовано и на других факультетах МГУ, а также в других вузах.

Предлагаемый курс лекций складывался на протяжении ряда лет, при его формировании я испытывал благотворное влияние известных учебников для студентов физических специальностей: «Основы математического анализа» В.А. Ильина и Э.Г. Позняка, «Математический анализ» Л.Д. Кудрявцева, «Курс математического анализа» С.М. Никольского. Первый из названных учебников долгие годы является основным учебником по математическому анализу на физическом факультете МГУ. Ссылки на него в тексте лекций даются под номером [1].

При подготовке пособия к печати большую помощь, связанную с компьютерным набором текста, оказали мне коллеги по кафедре математики физического факультета МГУ, особенно Н.Е. Шапкина, Д.А. Грачев, И.Е. Могилевский. Всем им я признателен и благодарен.

*В.Ф. Бутузов*

Глава 1

# ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

## § 1. Рациональные числа

Простейшими числами являются целые положительные числа $1, 2, \ldots$, используемые при счете. Они называются *натуральными* числами, и люди знали их так много тысячелетий назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер сказал: «Бог создал натуральные числа; все остальное — дело рук человека». Потребности практики привели к появлению простых дробей, т.е. чисел вида $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$, и т.д. Значительно позднее индусы изобрели важное число 0, а в начале нашей эры итальянцы открыли отрицательные числа. Мы будем исходить из того, что нам известны *рациональные* числа и действия над ними.

*Рациональное число* — это число, которое можно представить в виде отношения

$$\frac{m}{n},$$

где $m$ — целое, а $n$ — натуральное число.

Для рациональных чисел существуют три правила.

1) Правило сравнения: рациональные числа $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$, связаны тем же знаком ($>, =$ или $<$), что и целые числа $m_1 n_2$ и $m_2 n_1$.

Свойство множества рациональных чисел, состоящее в том, что любые два рациональных числа связаны между собой знаком $\geqslant$, называется *упорядоченностью* этого множества.

2) Правило сложения:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

3) Правило умножения:

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Эти три правила обладают рядом свойств, например, правило сравнения обладает свойством транзитивности знака $>$ (если $a >$

$> b$ и $b > c$, то $a > c$) и знака $=$ (если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$); правило сложения обладает перестановочным ($a + b = b + a$), сочетательным ($(a + b) + c = a + (b + c)$) и рядом других свойств; правило умножения также обладает перестановочным и сочетательным свойствами.

Рациональных чисел недостаточно для измерения различных величин, в частности, длин любых отрезков. Так, длина диагонали квадрата со стороной 1 не является рациональным числом. Возникает потребность расширить множество рациональных чисел и дополнить его так, чтобы иметь возможность измерять длины любых отрезков.

Отметим, что любое рациональное число с помощью процесса деления можно представить в виде *бесконечной десятичной периодической* дроби. Например,

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,(3); \frac{1}{6} = 0,16666\ldots = 0,1(6);$$
$$\frac{1}{2} = 0,500\ldots 0 = 0,5(0).$$

Для отличных от нуля рациональных чисел, у которых десятичная дробь имеет период, состоящий из одной цифры 0, существует иное представление в виде бесконечной десятичной дроби — с цифрой 9 в периоде, например,

$$\frac{1}{2} = 0,5(0) = 0,499\ldots 9\ldots = 0,4(9).$$

Как правило, для таких рациональных чисел используется способ представления в виде бесконечной десятичной дроби, у которой, начиная с некоторого разряда после запятой, все цифры равны нулю.Но иногда используется представление с цифрой 9 в периоде (см. §4).

## § 2. Иррациональные числа

Кроме периодических существуют и *непериодические* десятичные дроби, например,

$$0,123456789101112\ldots 100101102\ldots,$$
$$1,414213\ldots \qquad (\text{число } \sqrt{2}),$$
$$3,141592\ldots \qquad (\text{число } \pi),$$
$$2,718281828459045235 3\ldots \qquad (\text{число } e).$$

Бесконечные непериодические десятичные дроби будем называть *иррациональными числами*.

Рациональные и иррациональные числа с введенными для них ниже правилами сравнения, сложения и умножения называются *вещественными* (или *действительными*) числами.

Итак, любое вещественное число $a$ можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

где из двух знаков плюс и минус берется какой-то один, $\alpha_0$ — целое неотрицательное число, $\alpha_k$ — цифры ($k = 1, 2, \ldots$).

Далее возникает задача введения для вещественных чисел трех правил (сравнения, сложения и умножения) с сохранением тех свойств, которые имели место для рациональных чисел.

## § 3. Сравнение вещественных чисел

При сравнении вещественных чисел договоримся использовать для всех рациональных чисел, допускающих двоякое представление в виде бесконечной десятичной дроби, только один способ представления.

1) Если все $\alpha_k = 0$, то независимо от знака перед дробью число $a$ считаем равным нулю: $a = 0$. Если хотя бы одно $\alpha_k \neq 0$ и перед дробью стоит знак плюс, то число $a$ будем называть положительным и писать $a > 0$, если же стоит знак минус, то число $a$ будем называть отрицательным и писать $a < 0$.

2) Рассмотрим два вещественных числа: число $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ и число $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Будем считать, что $a = b$, если их знаки одинаковы и $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. В противном случае считаем, что $a \neq b$.

3) Пусть $a \geqslant 0, b \geqslant 0, a \neq b$. Тогда найдется такое целое число $k \geqslant 0$, что $\alpha_i = \beta_i \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1), \alpha_k \neq \beta_k$. Будем считать, что:

$$a > b, \quad \text{если} \quad \alpha_k > \beta_k,$$

$$a < b, \quad \text{если} \quad \alpha_k < \beta_k.$$

4) Пусть $a \leqslant 0, b > 0$. Тогда будем считать, что $a < b$.

5) Пусть $a < 0, b < 0, a \neq b$. Будем считать, что:

$$a > b, \quad \text{если} \quad |a| < |b|,$$

$$a < b, \quad \text{если} \quad |a| > |b|.$$

Здесь символом $|a|$ обозначено число $\alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n ...$, если $a = \pm$ $\pm\alpha_0, \alpha_1 ... \alpha_n ...$ .

**Задание.** Докажите, что сформулированное правило сравнения вещественных чисел обладает свойством транзитивности знаков $=$ и $>$, и что в применении к рациональным числам оно дает тот же результат, что и правило сравнения рациональных чисел.

Из правила сравнения следует, что если

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \geqslant 0,$$

то

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

(аналогичные неравенства имеют место для $a < 0$), т.е. любое неотрицательное вещественное число $a$ можно приблизить рациональными числами с произвольной точностью до $1/10^n$ ($n$ — любое натуральное число) по недостатку ($\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$) и по избытку ($\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + 1/10^n$). Аналогичные приближения имеют место, если $a < 0$.

Для введения правил сложения и умножения вещественных чисел нам понадобится новое понятие — понятие точных граней ограниченного числового множества.

## § 4. Точные грани ограниченного числового множества

Обозначим буквой $X$ множество вещественных чисел, содержащее хотя бы одно число (такое множество называется *непустым*). Любое число $x \in X$ будем называть *элементом* множества $X$.

**Определение.** Множество $X$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует число $M$ ($m$) такое, что для любого элемента $x \in X$ выполняется неравенство

$$x \leqslant M \quad (x \geqslant m).$$

Число $M$ ($m$) называется *верхней (нижней) гранью* множества $X$. Для краткости вместо слов «существует» и «для любого» будем использовать следующие логические символы (*кванторы*): $\exists$ — квантор существования (заменяет слово «существует» или «найдется») и $\forall$ — квантор всеобщности (заменяет выражения «для любого» или «для всех»).

Запишем данное определение ограниченного сверху множества с помощью кванторов.
Множество $X$ называется ограниченным сверху, если

$$\exists M, \quad \forall x \in X : x \leqslant M. \tag{1.1}$$

Отрицание этого предложения в позитивной форме выглядит так:
Множество $X$ называется неограниченным сверху, если

$$\forall M \quad \exists x \in X : x > M. \tag{1.2}$$

Сравнивая (1.1) и (1.2), мы видим, что для построения отрицания предложения (1.1) нужно квантор $\exists$ заменить на $\forall$, а квантор $\forall$ на $\exists$, и стоящее после двоеточия неравенство заменить ему противоположным. Это правило можно использовать и для построения отрицаний любых других утверждений, содержащих кванторы $\exists$ и $\forall$.

**Задание**. Запишите с помощью кванторов определение ограниченного снизу множества и отрицание этого определения.

Множество $X$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу, т.е. если $\exists M \quad$ и $\quad m, \quad \forall x \in X : m \leqslant x \leqslant M$.

Нетрудно видеть, что такое определение эквивалентно следующему: множество $X$ ограничено, если $\exists A > 0, \quad \forall x \in X : |x| \leqslant A$.

**Пример.** Множество $X = \{x : x < 0\}$ — ограничено сверху, но не ограничено снизу. Очевидно, любое неотрицательное число является верхней гранью этого множества. Таким образом, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних граней. Среди этих верхних граней в данном примере имеется наименьшая — число 0.

**Определение.** Наименьшая из верхних граней ограниченного сверху множества $X$ называется *точной верхней гранью* этого множества и обозначается

$$\sup X \qquad \text{(supremum множества X)} .$$

Иногда мы будем писать $\overline{x} = \sup X$.
Аналогично,наибольшая из нижних граней ограниченного снизу множества $X$ называется *точной нижней гранью* этого множества и обозначается

$$\inf X \qquad \text{(infinum множества X)},$$

другое обозначение: $\underline{x} = \inf X$.

Определение точной верхней грани можно сформулировать иначе: число $\overline{x}$ называется точной верхней гранью ограниченного сверху множества $X$, если:

1) $\forall x \in X: \quad x \leqslant \overline{x}$ (это означает, что $\overline{x}$ — одна из верхних граней множества $X$);

2) $\forall \widetilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X: \quad x > \widetilde{x}$ (это означает, что $\overline{x}$ — наименьшая из верхних граней).

**Задание.** Сформулируйте аналогичное определение точной нижней грани.

Поставим вопрос: всегда ли среди верхних граней ограниченного сверху множества имеется наименьшая? Ответ на этот вопрос не очевиден. Например, множество $\{x : x > 0\}$ не имеет наименьшего числа. Оказывается, что в отношении верхних граней ограниченного сверху множества ответ на поставленный вопрос положительный.

**Теорема.** Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Мы докажем теорему для точной верхней грани (для точной нижней грани доказательство аналогично). Пусть $X$ — ограниченное сверху множество, т.е. $\exists M, \quad \forall x \in X : x \leqslant M$. Могут представиться 2 случая:

1) среди элементов множества $X$ имеется хотя бы одно число $x \geqslant 0$;

2) $\forall x \in X: \quad x < 0$.

В случае 1) будем рассматривать только неотрицательные $x \in X$: $X_+ = \{x \in X : x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \geqslant 0\}$. Т.к. $x_0 \leqslant M$, то среди всех целых частей чисел из множества $X_+$ имеется наибольшее целое число. Пусть

$$\max_{X_+}\{x_0\} = \overline{x_0}.$$

Рассмотрим множество $X_0 = \{x \in X : x = \overline{x_0}, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots\}$. Пусть

$$\max_{X_0}\{x_1\} = \overline{x_1}.$$

Далее рассмотрим множество $X_1 = \{x \in X\colon x = \overline{x_0}, \overline{x_1} x_2 \ldots x_n \ldots\}$. Пусть

$$\max_{X_1}\{x_2\} = \overline{x_2}.$$

И так далее. На $k$-ом шаге рассмотрим множество

$$X_{k-1} = \{x \in X : x = \overline{x_0}, \overline{x_1} \ldots \overline{x_{k-1}} x_k \ldots\}.$$

Пусть

$$\max_{X_{k-1}}\{x_k\} = \overline{x_k}.$$

Продолжая (мысленно) этот процесс, мы определим числа $\overline{x_k}$ для всех $k$.

Рассмотрим число

$$\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1} \ldots \overline{x_n} \ldots$$

и докажем, что $\overline{x} = \sup X$. Для этого нужно доказать, что:

а) $\forall x \in X: \quad x \leqslant \overline{x}$;

б) $\forall \widetilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X: \quad x > \widetilde{x}$.

Докажем утверждение а). Так как $\overline{x} \geqslant 0$, то для любого отрицательного $x \in X$: $x \leqslant \overline{x}$. Если же предположить, что существует неотрицательное число $x = x_0, x_1 \ldots x_n \ldots \in X$, такое, что $x > \overline{x}$, то по правилу сравнения вещественных чисел $\exists k: x_0 = \overline{x_0}, \ldots, x_{k-1} = \overline{x_{k-1}}, x_k > \overline{x_k}$. С другой стороны, в силу написанных равенств, $x \in X_{k-1}$, и, следовательно, согласно определению $\overline{x_k}$, выполняется неравенство

$$x_k \leqslant \overline{x_k} = \max_{X_{k-1}}\{x_k\}.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Итак, $\forall x \in X: \quad x \leqslant \overline{x}$.

Докажем утверждение б). Пусть

$$0 \leqslant \widetilde{x} = \widetilde{x_0}, \widetilde{x_1} \ldots \widetilde{x_n} \ldots < \overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1} \ldots \overline{x_n} \ldots.$$

Тогда $\exists k$, такое, что $\quad \widetilde{x_0} = \overline{x_0}, \ldots, \widetilde{x_{k-1}} = \overline{x_{k-1}}, \widetilde{x_k} < \overline{x_k}$. Возьмем любое $x \in X_k$. Оно имеет вид

$$\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1} \ldots \overline{x_k} x_{k+1} \ldots,$$

и, следовательно, согласно правилу сравнения вещественных чисел, справедливо неравенство $x > \widetilde{x}$. Таким образом, мы доказали, что $\forall \widetilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X: \quad x > \widetilde{x}$.

Итак, для случая 1) мы доказали, что $\overline{x} = \sup X$. Обратимся к случаю 2). Если все $x < 0$, т.е. $x = -x_0, x_1 \ldots x_n \ldots$, то построение числа $\overline{x} = -\overline{x_0}, \overline{x_1} \ldots \overline{x_n} \ldots$ ведется аналогично, только теперь нужно положить

$$\overline{x_0} = \min_X\{x_0\},$$

далее нужно рассмотреть множество

$$X_0 = \{x \in X : x = -\overline{x_0}, x_1 \dots x_n \dots\}$$

и положить

$$\overline{x_1} = \min_{X_0}\{x_1\}$$

и т.д. Как и в случае 1) доказывается, что $\overline{x} = \sup X$. Теорема доказана.

**Задание.** Докажите существование точной нижней грани у ограниченного снизу множества.

Отметим, что точная верхняя (нижняя) грань ограниченного сверху (снизу) множества может не принадлежать этому множеству. Приведем пример: пусть $X = \{x : x < 2,5\}$. Здесь $\overline{x} = 2,4(9) = 2,5 \notin X$. Еще один пример: $X = \{x : 1 < x \leqslant 2\}$. Здесь $\sup X = 2 \in X$, в то время как $\inf X = 1 \notin X$. Таким образом, нужно различать *существование* точных граней множества $X$ и *принадлежность* их множеству $X$. Заметим также, что в последнем примере множество $X$ имеет наибольшее (максимальное) число: $\max X = 2 = \sup X$, но не имеет минимального числа. Понятия sup и inf являются обобщениями понятий max и min. В отличие от max и min у ограниченного множества всегда имеются sup и inf.

## § 5. Арифметические операции над вещественными числами

### Сложение вещественных чисел

Пусть $x$ и $y$ — произвольные вещественные числа, и пусть $x_r$ и $y_r$ — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$x_r \leqslant x, \quad y_r \leqslant y.$$

Рассмотрим множество $\{x_r + y_r\}$ (здесь $x_r$ и $y_r$ складываются по правилу сложения рациональных чисел). Оно ограничено сверху. Действительно, если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — рациональные числа, такие, что $x \leqslant \overline{x}$, $y \leqslant \overline{y}$, то в силу транзитивности знака $\leqslant$ имеем: $x_r \leqslant \overline{x}$, $y_r \leqslant \overline{y}$, откуда $x_r + y_r \leqslant \overline{x} + \overline{y}$. Итак, множество $\{x_r + y_r\}$ ограничено сверху. Следовательно, оно имеет точную верхнюю грань.

**Определение.** *Суммой вещественных чисел* $x$ и $y$ назовем точную верхнюю грань множества $\{x_r + y_r\}$:

$$x + y = \sup_{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ x_r \leqslant x \\ y_r \leqslant y}} \{x_r + y_r\}.$$

Здесь и далее буквой $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел.

### Умножение вещественных чисел

1) Пусть $x > 0$ и $y > 0$ — произвольные вещественные числа, и пусть $x_r$ и $y_r$ — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_r \leqslant x, \quad 0 < y_r \leqslant y.$$

Рассмотрим множество $\{x_r \cdot y_r\}$, где умножение $x_r \cdot y_r$ производится по правилу для рациональных чисел. Оно ограничено сверху.

**Определение.** *Произведением положительных вещественных чисел* $x$ и $y$ назовем точную верхнюю грань множества $\{x_r \cdot y_r\}$:

$$x \cdot y = \sup_{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ 0 < x_r \leqslant x \\ 0 < y_r \leqslant y}} \{x_r \cdot y_r\}.$$

2) $\forall x$ полагаем: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

3) Пусть $x \neq 0, y \neq 0$. Тогда полагаем (по определению)

$$x \cdot y = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака,} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Можно доказать, что сформулированные правила сложения и умножения вещественных чисел обладают такими же свойствами, как и правила сложения и умножения рациональных чисел, и что в применении к рациональным числам они дают тот же результат, что и правила сложения и умножения рациональных чисел.

*Вычитание* определяется как действие, обратное сложению: разность чисел $x$ и $y$ — это такое число $z$, что $y + z = x$. Можно доказать, что $\forall x, y \quad \exists! \quad z : y + z = x$ (Здесь знак ! означает, что такое число $z$ единственно).

*Деление* определяется как действие, обратное умножению: частное от деления $x$ на $y \neq 0$ — это такое число $z$, что $y \cdot z = x$. Можно доказать, что $\forall x, \forall y \neq 0 \quad \exists! z : \quad y \cdot z = x$.

## § 6. Некоторые числовые неравенства

а) $\forall a: \quad -|a| \leqslant a \leqslant |a|$. Данное неравенство непосредственно следует из правила сравнения вещественных чисел.

б) $\forall a, b: \quad |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$ (докажите самостоятельно).

в) $\forall a, b: \quad |a - b| \geqslant |a| - |b|$.

Доказательство. Так как $|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$ в силу утверждения б), то $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

## § 7. Геометрическое изображение вещественных чисел

Введем в рассмотрение *координатную прямую* (или *ось координат*), т.е. прямую, на которой выбрано направление, начало отсчета (точка 0) и масштабный отрезок $OE$, длину которого полагаем равной 1 (рис. 1.1).

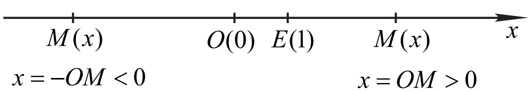


Рис. 1.1.

Каждой точке $M$ координатной прямой поставим в соответствие определенное вещественное число — длину отрезка $OM$, если точка $M$ лежит на положительной полуоси, и взятую со знаком минус длину отрезка $OM$, если точка $M$ лежит на отрицательной полуоси.Точке $O$ поставим в соответствие число нуль.

Итак, каждой точке $M$ координатной прямой соответствует некоторое вещественное число. Имеет место и обратное соответствие, т.е. каждому вещественному числу соответствует некоторая точка на координатной прямой. Доказательство этого утверждения основывается на аксиомах геометрии, а именно, на аксиоме непрерывности прямой. Мы не будем заниматься этим подробно.

Для наглядности мы будем часто пользоваться геометрическим изображением вещественных чисел в виде точек на координатной прямой. Поэтому сами числа часто будем называть точками.

Заметим, что если $\overline{x} = \sup X$, то каждая точка множества $X$ лежит левее $\overline{x}$ или совпадает с $\overline{x}$, причем сколь угодно близко от $\overline{x}$ имеются точки множества $X$.

## § 8. Некоторые числовые множества

1) *Интервал* $(a, b) = \{x : a < x < b\}$.
2) *Сегмент* (или *отрезок*) $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$; точки $a$ и $b$ называются *граничными* точками сегмента, остальные его точки — *внутренними* точками.
3) *Окрестность точки* $c$ — любой интервал, содержащий точку $c$.
4) $\varepsilon$-*окрестность точки* $c$ — интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, то есть $\{x : |x - c| < \varepsilon\}$.
5) *Проколотая* $\varepsilon$-*окрестность точки* $c$ — множество $\{x : 0 < |x - c| < \varepsilon\}$.
6) *Числовая прямая* $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
7) *Полупрямая* $[a, +\infty) = \{x : x \geqslant a\}$ или $(-\infty, a]$ или $(a, +\infty)$ или $(-\infty, a)$.

Каждое из множеств 1)-4) и 6), 7) называется также *числовым промежутком*, проколотая окрестность точки состоит из двух промежутков.

Глава 2

# ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

## § 1. Понятие функции

Пусть $X$ — некоторое числовое множество.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое (единственное) число $y$, то говорят, что на множестве $X$ определена (задана) *функция* и пишут $y = f(x)$ (или $y = y(x)$). При этом множество $X$ называется *областью определения функции*; переменная числовая величина $x$, принимающая значения из $X$ (пробегающая множество $X$) называется *независимой переменной* или *аргументом* функции. Число $y$, соответствующее данному значению $x$, называется *частным значением* функции в точке $x$; $\{y\}$ — *множество значений* функции.

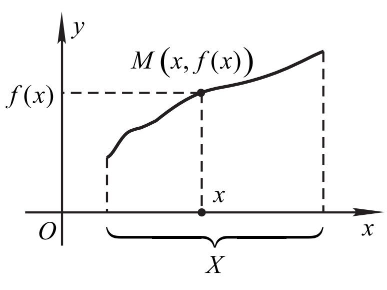



Рис. 2.1.

Геометрически функция $y = f(x)$ изображается своим *графиком*. График функции — это множество точек $\{M(x, f(x)), x \in X\}$ в прямоугольной системе координат $Oxy$ (рис. 2.1).

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X$, если существует число $M$ (число $m$), такое, что $\forall x \in X : f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$). При этом число $M(m)$ называется *верхней (нижней) гранью* функции $f(x)$ на множестве $X$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на множестве $X$, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу, т.е. $\exists M$ и $m$ такие, что $\forall x \in X : m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Другое (эквивалентное) определение: функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $X$, если $\exists A > 0, \forall x \in X : |f(x)| \leqslant A$.

**Определение**. Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней ограниченной сверху (снизу) функции $f(x)$ на множестве $X$ называется ее *точной верхней (нижней) гранью* на этом множестве и обозначается

$$\sup_X f(x) \quad (\inf_X f(x)).$$

Можно сказать иначе: точная верхняя грань функции $y = f(x)$ — это $\sup\{y\}$, где $\{y\}$ — множество значений функции.

**Эквивалентное определение.** Число $M$ называется точной верхней гранью функции $f(x)$ на множестве $X$, если:

1) $\forall x \in X : f(x) \leqslant M$ (это условие показывает, что $M$ — одна из верхних граней $f(x)$ на $X$);

2) $\forall \widetilde{M} < M \quad \exists \widetilde{x} \in X : f(\widetilde{x}) > \widetilde{M}$ (это условие показывает, что $M$ — наименьшая из верхних граней).

**Задание.**

1) Сформулируйте аналогичное определение точной нижней грани функции,

2) Сформулируйте определения:

а) неограниченной сверху на множестве $X$ функции,

б) неограниченной снизу на множестве $X$ функции,

в) неограниченной на множестве $X$ функции.

**Пример.** Рассмотрим функцию $y = \sin x, \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

$$\sup_{(0,\pi/2]} \sin x = 1 \in \{y\}, \qquad \inf_{(0,\pi/2]} \sin x = 0 \notin \{y\}.$$

Этот пример показывает, что ограниченная функция может не принимать значения, равного какой-либо ее точной грани. В таком случае говорят, что функция не достигает этой точной грани.

## § 2. Определение предела функции

**Определение.** Число $a$ называется *предельной точкой числового множества* $X$, если в любой проколотой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ содержатся точки из множества $X$.

При этом сама точка $a$ может принадлежать, а может и не принадлежать множеству $X$.

**Примеры.**

1) $X = \{x : a < x < b\}$. Любая точка интервала $X$, а также точки $a$ и $b$ — предельные точки интервала $X$.

2) $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел — не имеет предельных точек.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X$ и $a$ — предельная точка $X$.

**Определение (по Коши).** Число $b$ называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a$ (при $x \to a$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что для любого значения аргумента $x$ из проколотой $\delta$-окрестности точки $a$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (иначе говоря, $|f(x) - b| < \varepsilon$, если $x \in X$ и $0 < |x - a| < \delta$).
Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

**Задание**. Постройте отрицание определения предела функции, то есть сформулируйте определение

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq b.$$

Геометрическая иллюстрация определения предела функции.

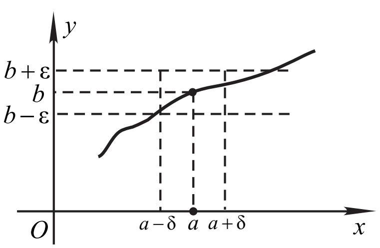



Рис. 2.2.

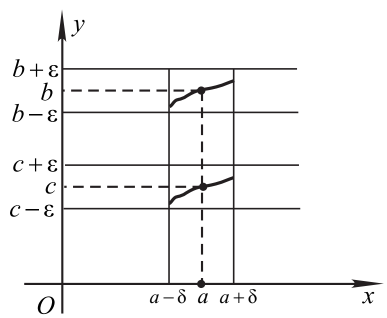



Рис. 2.3.

Поскольку

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

то существование предела, равного $b$, у функции $f(x)$ при $x \to a$ с геометрической точки зрения означает, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что в пределах проколотой $\delta$-окрестности точки $a$ график $f(x)$ лежит в полосе между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 2.2).
Замечание 1. Функция может иметь в данной точке не более одного предела.

В самом деле, если предположить, что функция имеет в точке $a$ два предела: $b$ и $c$, то, взяв непересекающиеся $\varepsilon$-окрестности точек $b$ и $c$, получим, что в пределах некоторой проколотой

$\delta$-окрестности точки $a$ график функции лежит одновременно в полосе между $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ и также в полосе между прямыми $y = c - \varepsilon$ и $y = c + \varepsilon$, чего не может быть (рис. 2.3).

Замечание 2. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке $a$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Утверждение следует непосредственно из определения предела функции: $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.

**Примеры.**

1) Пусть $f(x) = b = const\ \forall x \in \mathbb{R}$, тогда $\forall a:$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем любое $\delta > 0$. Тогда $|f(x) - b| = 0 < \varepsilon$ при всех $x$ и, значит, при $0 < |x - a| < \delta$.

2) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a \\ c \neq b, & \text{если } x = a \end{cases},$$

тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

3) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a \\ \text{не определена}, & \text{если } x = a, \end{cases}$$

тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Замечание 3. В примерах 2) и 3), как и в примере 1), для любого $\varepsilon > 0$ можно взять любое $\delta > 0$, то есть $\delta$ не зависит от $\varepsilon$.

Замечание 4. Если в определении предела функции опустить неравенство $0 < |x - a|$, т.е. потребовать выполнения неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех значений аргумента $x$ из $\delta$-окрестности точки $a$, включая и саму точку $a$ (если, конечно, она принадлежит области определения функции), то ответ в примере 3 не изменится, поскольку $x = a$ не является значением аргумента функции. В примере 2, напротив, ответ изменится: предел у функции $f(x)$ при $x \to a$ не будет существовать, так как для $x = a$ неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ принимает вид $|c - b| < \varepsilon$, и, следовательно, оно не выполняется, если взять $\varepsilon$ меньше, чем $|c - b|$.

4) Пусть $f(x) = x$, тогда для любого $a$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

В самом деле, $\forall\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда если $|x - a| < \delta = \varepsilon$, то $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

5) Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Заметим, что $x = 0$ является предельной точкой области определения функции, и докажем, что эта функция не имеет предела при $x \to 0$.

Доказательство проведем от противного: предположим, что

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = b,$$

где $b$ — некоторое число. Возьмем $\varepsilon = 1$. По определению предела функции $\exists\delta > 0$, такое, что $\left|\sin\frac{1}{x} - b\right| < 1$ при $0 < |x| < \delta$.

Возьмем

$$x_1 = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}.$$

При достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ числа $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют неравенствам: $0 < |x_i| < \delta, i = 1, 2$. При этом

$$\left|\sin\frac{1}{x_1} - b\right| = |1 - b| < 1 \quad \text{и} \quad \left|\sin\frac{1}{x_2} - b\right| = |-1 - b| = |1 + b| < 1.$$

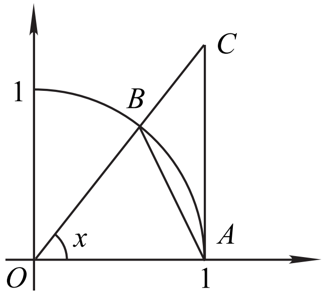



Рис. 2.4.

Последние два неравенства не могут одновременно выполняться ни при каком $b$, следовательно, наше предположение неверно и предел функции $f(x)$ при $x \to 0$ не существует.

6) Пусть $f(x) = \sin x$, тогда

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Чтобы доказать это, воспользуемся известным неравенством $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Оно выражает тот факт, что площадь равнобедренного треугольника, вписанного в сектор единичной окружности, меньше площади этого сектора (рис. 2.4): $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin x < S_{\text{сект. } AOB} = \frac{1}{2}x$. Попутно заметим, что $S_{\text{сект. } AOB} < S_{\Delta AOC}$, то есть $\dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$, или $x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (это неравенство понадобится нам не здесь, а позднее). В силу нечетности функций $\sin x$ и $x$ имеем:

$$|\sin x| < |x| \quad \text{при} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \delta = \varepsilon$, получим

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

## Односторонние пределы

Может случиться так, что при стремлении аргумента $x$ к точке $a$ слева и справа функция $f(x)$ имеет разные предельные значения. В качестве примера приведем функцию (рис. 2.5)

$$f(x) = \operatorname{sgn}\, x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

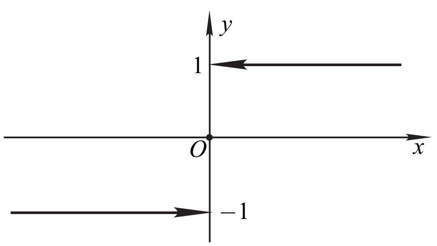



Рис. 2.5.

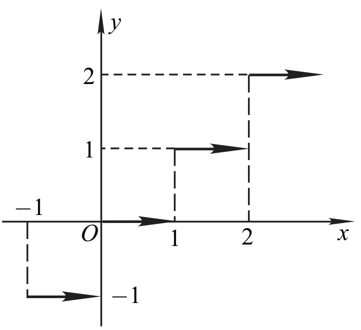



Рис. 2.6.

**Определение.** Число $b$ называется *пределом функции $f(x)$ в точке $a$ справа (слева)*, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in (a, a+\delta)$ (соответственно, $\forall x \in (a-\delta, a)$) выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a+0) = b$$
$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a-0) = b\right).$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, где $[x]$ —целая часть числа $x$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $x$ (рис. 2.6). Для любого $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел, включая нуль) имеем:

$$f(n-0) = n-1, \quad f(n+0) = n \quad \text{и} \quad f(n) = n.$$

Из определения предела функции и определений односторонних пределов следует

**Теорема 1.** Если у функции $f(x)$ существуют в точке $a$ предел слева и предел справа, причем $f(a-0) = f(a+0) = b$, то в данной точке существует предел этой функции, равный $b$.

### Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X$ и $\forall A \quad \exists x \in \in X : x > A$.

**Определение.** Число $b$ будем называть *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A$, такое, что для любого значения аргумента $x > A$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Аналогично определяется предел функции при $x \to -\infty$. Если функция $f(x)$ имеет равный числу $b$ предел при $x \to +\infty$ и равный этому же числу предел при $x \to -\infty$, то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$ и докажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $A = 1/\varepsilon$. Тогда если $x > A = 1/\varepsilon$, то $1/x < \varepsilon$, т.е. $|1/x - 0| < \varepsilon$, а это означает, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Задание.** Докажите, что функция $f(x) = 1/x$ имеет равный нулю предел и при $x \to -\infty$.

Частный случай предела функции при $x \to +\infty$ — *предел числовой последовательности.*

*Числовая последовательность* — это функция, определенная на множестве натуральных чисел: $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Обычно числовую последовательность обозначают так:

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Индекс $n$ называется номером члена последовательности $x_n$.

**Определение.** Число $a$ называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, такой, что $\forall n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то говорят, что она *сходится*, а если не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

**Задание**. Пусть $x_n = \dfrac{n+1}{n}$. Докажите, пользуясь определением предела числовой последовательности, что

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1.$$

## § 3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке* $a$ (при $x \to a$), если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Иначе говоря, функция $f(x)$ —бесконечно малая в точке $a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| < \varepsilon$. Разумеется, неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ должно выполняться для тех $x$ из проколотой $\delta-$окрестности точки $a$, которые входят в область определения $X$ функции $f(x)$, но для краткости записи условие $x \in X$ будем часто опускать.

**Примеры.**

1) Функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в точке $x = 0$, так как (это было доказано)

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

также является бесконечно малой в точке $x = 0$ (заметим, что при этом $f(0) = 1 \neq 0$).

3) Функция $f(x) = \operatorname{sgn}\, x$ не является бесконечно малой в точке $x = 0$, хотя $f(0) = 0$.

Аналогично определяется бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $-\infty$) функция, в частности, бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

**Примеры.**
1) Функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.
2) Последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой в точке* $a$ (при $x \to a$), если

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| > A.$$

Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Если при этом выполнено неравенство $f(x) > A$ ($f(x) < -A$), то пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty).$$

**Пример.** Функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно большой в точке $x = 0$ (для доказательства этого утверждения достаточно $\forall A > 0$ взять $\delta = 1/A$).

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \to +\infty$ $(-\infty)$ , а также при $x \to a+0$ $(x \to a-0)$.

**Примеры:**

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty; \; \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

**Задание.** Докажите следующие утверждения (считая, что $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $a$):
1) если $f(x)$ — бесконечно большая в точке $a$ функция, то в некоторой проколотой окрестности точки $a$ определена функция $g(x) = 1/f(x)$ и она является бесконечно малой в точке $a$.
2) если $f(x)$ — бесконечно малая в точке $a$ функция и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$, то $g(x) = 1/f(x)$ —

бесконечно большая функция в точке $a$.
3) если $f(x) = c = \text{const}$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

то $c = 0$.

**Теорема 2.** Сумма и разность двух бесконечно малых в точке $a$ функций являются бесконечно малыми в точке $a$ функциями.
Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые в точке $a$ функции. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_1 > 0, \ \ \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta_1\} : \ \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и также

$$\exists \delta_2 > 0, \ \ \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta_2\} : \ \ |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\}$ выполнены неравенства

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ и } \ |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно,

$$\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x) \pm g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функции $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ являются бесконечно малыми в точке $a$.
**Следствие.** Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке $a$ функций является бесконечно малой в точке $a$ функцией.
Доказательство проведем по индукции. Для двух слагаемых утверждение верно в силу теоремы 2. Предположим, что утверждение верно для $n$ слагаемых ($n \geqslant 2$), и докажем, что тогда оно верно и для $n+1$ слагаемых.

Пусть $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), f_{n+1}(x)$ — бесконечно малые в точке $a$ функции. Их сумму представим в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + f_{n+1}(x) = g(x) + f_{n+1}(x)$$

Функция $g(x)$ является бесконечно малой в точке $a$ в силу индуктивного предположения. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n+1} f_i(x)$ представляет собой сумму двух бесконечно малых в точке $a$ функций $g(x)$ и $f_{n+1}(x)$, а такая сумма является бесконечно малой в точке $a$ функцией в силу теоремы 2. Следствие доказано.

**Теорема 3.** Произведение бесконечно малой в точке $a$ функции на ограниченную в окрестности точки $a$ функцию есть бесконечно малая функция в точке $a$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — бесконечно малая в точке $a$ функция, а $g(x)$ — ограниченная функция в некоторой окрестности точки $a$ (обозначим эту окрестность $\omega$). Тогда существует такое число $M > 0$, что $\forall x \in \omega : |g(x)| \leqslant M$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ — бесконечно малая в точке $a$ функция, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Возьмем $\delta_1 \leqslant \delta$ столь малым, что $\delta_1$-окрестность точки $a$ принадлежит $\omega$. Тогда

$$\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta_1\} : |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

а это и означает, что $f(x) \cdot g(x)$ — бесконечно малая в точке $a$ функция.

**Следствие.** Произведение конечного числа ограниченных функций, из которых хотя бы одна — бесконечно малая в точке $a$, есть бесконечно малая в точке $a$ функция.

## Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые в точке $a$ функции. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа* $\dfrac{0}{0}$.

**Пример.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ является неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$.

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* (имеет *более высокий порядок малости*), чем $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Обозначение: $f = \mathrm{o}(g)$ при $x \to a$ (символ o(g) читается так: о-малое от $g$).

**Пример.** $x^2 = \mathrm{o}(x)$ при $x \to 0$.

**Определение.** Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* (имеют *одинаковый порядок малости*) при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0.$$

Обозначение: $f = \mathrm{O}(g)$ при $x \to a$ (символ O(g) читается так: О-большое от $g$).

**Пример.** $2x^2 + x^3 = \mathrm{O}(x^2)$ при $x \to 0$.

**Определение.** Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f \sim g$ при $x \to a$.

**Примеры.**

1) $x^2 + x^3 \sim x^2$ при $x \to 0$.
2) $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ (это будет доказано ниже).

Замечание. Для неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a+0$, $x \to a-0$ и $x \to \infty$ можно дать аналогичные определения.

**Свойства символа «о-малое»:**

а) $\mathrm{o}(g) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g)$.

б) Если $f = \mathrm{o}(g)$, то $\mathrm{o}(f) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g)$.

Пример: $\mathrm{o}(x^2) \pm \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(x)$.

в) Если $f$ и $g$ — бесконечно малые, то $f \cdot g = \mathrm{o}(f)$, $f \cdot g = \mathrm{o}(g)$.

г) Если $f \sim g$, то $f - g = \mathrm{o}(f)$ и $f - g = \mathrm{o}(g)$.

д) $\mathrm{o}(c \cdot g) = \mathrm{o}(g)$, если $c = \mathrm{const} \neq 0$.

е) $\mathrm{o}(g + \mathrm{o}(g)) = \mathrm{o}(g)$. Пример: $\mathrm{o}(x + 2x^2) = \mathrm{o}(x)$.

Справедливость этих утверждений нетрудно доказать, используя определение символа «о-малое».

Замечание. Равенства с символом «о-малое», как правило, верны только в одну сторону (слева направо). Например, $x^2 = \mathrm{o}(x)$ при $x \to 0$, но, вообще говоря, $\mathrm{o}(x) \neq x^2$.

2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие в точке $a$ функции. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

**Определение.** Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ *более высокий порядок роста*, чем функция $g(x)$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

**Пример.** Функция $f(x) = 1/x^2$ имеет при $x \to 0$ более высокий порядок роста, чем функция $g(x) = 1/x$, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

**Определение.** Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to a$ *одинаковый порядок роста*, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0.$$

**Пример.** Функции $f(x) = 1/x + 1$ и $g(x) = 1/x$ имеют при $x \to 0$ одинаковый порядок роста.

3) Существуют другие типы неопределенностей:

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0.$$

Приведем примеры.

а)

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

является неопределенностью типа $\infty - \infty$.

б)

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

является неопределенностью типа $0 \cdot \infty$.

в)

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$$

является неопределенностью типа $1^\infty$.

г)

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

является неопределенностью типа $0^0$.

д)

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$$

является неопределенностью типа $\infty^0$.

## § 4. Свойства пределов функций

**Лемма 1.** Если

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция в точке $a$.

Доказательство. Согласно определению предела

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Это означает, что функция $\alpha(x) = f(x) - b$ — бесконечно малая в точке $a$. Представим $f(x)$ в виде $f(x) = b + [f(x) - b] = b + \alpha(x)$. Тем самым лемма 1 доказана.

**Лемма 2 (обратная)**. Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $b$ — число, а $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция в точке $a$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Докажите лемму 2 самостоятельно.

**Теорема 4.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки $a$, и пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Тогда:

1)
$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = b \pm c.$$

2)
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc.$$

3) если $c \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки $a$ определена функция $f(x)/g(x)$ и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Доказательство. 1) В силу леммы 1

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad g(x) = c + \beta(x), \tag{2.1}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции в точке $a$. Поэтому

$$f(x) \pm g(x) = (b \pm c) + \alpha(x) \pm \beta(x) = (b \pm c) + \gamma(x), \tag{2.2}$$

где $\gamma(x) = \alpha(x) \pm \beta(x)$ — бесконечно малая функция в точке $a$ в силу теоремы 2. Согласно лемме 2 из равенства (2.2) следует, что

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = b \pm c.$$

2) Докажите самостоятельно.
3) Пусть $c > 0$ (для $c < 0$ доказательство аналогичное). Возьмем $\varepsilon = \frac{c}{2}$. По определению предела функции

$$\exists\delta > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : \quad |g(x) - c| < \varepsilon,$$

то есть $c - \varepsilon < g(x) < c + \varepsilon$, или $\frac{c}{2} < g(x) < \frac{3c}{2}$, поскольку $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Из левого неравенства следует, что $g(x) \neq 0$ в проколотой $\delta-$окрестности точки $a$, и, следовательно, в этой проколотой окрестности определена функция $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Используя равенства (2.1), получаем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b + \alpha(x)}{c + \beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c \cdot g(x)} := \gamma(x). \tag{2.3}$$

(Символ := означает, что дробь, стоящая слева от этого символа, обозначена через $\gamma(x)$).

Функция $\frac{1}{cg(x)}$ ограничена в проколотой $\delta-$окрестности точки $a$, так как $g(x) > \frac{c}{2}$ и, следовательно, $0 < \frac{1}{cg(x)} < \frac{2}{c^2}$, а функция $c\alpha(x) - b\beta(x)$ – бесконечно малая в точке $a$ в силу теорем 2 и 3. Поэтому $\gamma(x)$ — бесконечно малая в точке $a$ функция (по теореме 3).

Из равенства (2.3) следует, что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} + \gamma(x)$, а это в силу леммы 2 означает, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Теорема 4 справедлива в отношении пределов функций при $x \to \infty$.

**Следствия из теоремы 4:**

1)
$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x),$$
где $c = \mathrm{const}$.

2) Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ —многочлены степени $n$ и $m$, тогда функция $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ называется *рациональной функцией* или *рациональной дробью*.

Имеет место следующее утверждение: если $Q_m(a) \neq 0$, то
$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Доказательство. Пусть $Q_m(x) = C_m x^m + C_{m-1}x^{m-1} + ... + C_0$, где $C_i$ — какие-то числа (коэффициенты многочлена $Q_m(x)$). Ранее было доказано, что
$$\lim_{x\to a} x = a.$$

Отсюда, в силу теоремы 4, следует, что
$$\lim_{x\to a} x^i = a^i (i = 1, 2, ..., m), \quad \lim_{x\to a} c_i x^i = c_i a^i,$$
$$\lim_{x\to a} Q_m(x) = c_m a^m + c_{m-1}a^{m-1} + ... + c_0 = Q_m(a).$$
Аналогично,
$$\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a),$$
а так как $Q_m(a) \neq 0$, то
$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

**Пример.**
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-3} = \frac{2}{-1} = -2.$$

**Теорема 5.** Если в некоторой проколотой окрестности точки $a$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant c \quad (f(x) \leqslant c)$ и существует
$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

то $b \geqslant c$ $(b \leqslant c)$.
Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f(x) \geqslant c$, и докажем, что $b \geqslant c$. Допустим, что $b < c$, и возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $b + \varepsilon < c$. По определению предела функции существует $\delta > 0$ такое, что в проколотой $\delta$–окрестности точки $a$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Таким образом, в некоторой проколотой $\delta$–окрестности точки $a$ должны одновременно выполняться неравенства $f(x) \geqslant c$ и $f(x) < b + \varepsilon < c$, чего не может быть. Полученное противоречие доказывает, что $b \geqslant c$.

Замечание 2. Теорема 5 справедлива в отношении предела функции при $x \to \infty$.

Замечание 3 (о пределе последовательности). Если для любого номера $n$ выполнено неравенство $c \leqslant x_n \leqslant b$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $c \leqslant a \leqslant b$.

Замечание 4. Из условия $f(x) > c$ не следует, что и предел функции будет больше $c$. Приведем пример: $1/x > 0$ при $x > 0$ , тогда как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Теорема 6.** Если в проколотой окрестности точки $a$ выполняются неравенства $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и существуют пределы функций $f(x)$ и $h(x)$ при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b,$$

то существует

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела функции найдется проколотая $\delta$–окрестность точки $a$, в которой $|f(x) - b| < \varepsilon$, $|h(x) - b| < \varepsilon$ и, кроме того, выполняются неравенства $f(x) - b \leqslant g(x) - b \leqslant h(x) - b$. Отсюда следует, что $|g(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

## § 5. Теорема о пределе монотонной функции

**Определение.** Функция $f(x)$ называется: а) *возрастающей*, б) *убывающей*, в) *невозрастающей*, г) *неубывающей* на множестве $X$, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство: а) $f(x_1) < f(x_2)$, б) $f(x_1) > f(x_2)$, в) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, г) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Функции а)-г) называются *монотонными*, а функции а) и б) — *строго монотонными* на множестве $X$.

**Примеры.**

1) Функция $f(x) = x^2$ является возрастающей на полупрямой $(0; +\infty)$.

2) Функция $f(x) = [x]$ (целая часть $x$) не убывает на числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

**Теорема 7.** Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на полупрямой $x \geqslant a$, то существует

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ не убывает на полупрямой $x \geqslant a$ и ограничена сверху на этом множестве (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично). Тогда существует точная верхняя грань функции (обозначим ее буквой $b$):

$$\sup_{x \in [a; +\infty)} f(x) = b.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $b - \varepsilon$. По определению точной верхней грани функции $\exists A \in [a; +\infty)$ : $f(A) > b - \varepsilon$. Поскольку $f(x)$ не убывает, то $f(x) \geqslant f(A)$ при $x > A$, и, следовательно, $f(x) > b - \varepsilon$ при $x > A$. Отсюда получаем неравенство $b - f(x) < \varepsilon$ при $x > A$, или $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x > A$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Теорема 7 доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для правого и левого пределов функции в точке $a$: если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в правой (левой) полуокрестности точки $a$, то существует

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x)\right).$$

**Следствие.** Монотонная ограниченная последовательность сходится.

**Пример.** Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что $\{x_n\}$ — монотонная ограниченная последовательность (тем самым будет доказано, что эта последовательность сходится).

Нам потребуется *неравенство Бернулли*:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in [-1, +\infty): \ (1+x)^n \geqslant 1 + nx,$$

причем при $n > 1$ знак равенства имеет место только для случая $x = 0$ (предлагается доказать это неравенство самостоятельно, используя метод математической индукции).

Покажем, используя неравенство Бернулли, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\left(n^2+2n+1-1\right)^{n+1}}{\left(n^2+2n+1\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

откуда следует, что $x_{n+1} > x_n$ для любых $n$, то есть последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая.

Рассмотрим теперь последовательность $\{y_n\}$, где

$$y_n = x_n \cdot (1 + 1/n).$$

Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ y_n > x_n$. Вновь используя неравенство Бернулли, нетрудно доказать, что $y_n < y_{n-1}$, т.е. последовательность $\{y_n\}$ — убывающая.

Таким образом,

$$2 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1 = 4,$$

то есть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — монотонные ограниченные последовательности. Значит, они сходятся, причем

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Предел числовой последовательности $\{x_n\}$ — это и есть знаменитое число $e$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828\ldots.$$

# Глава 3
# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

## § 1. Определение непрерывности. Точки разрыва функции

Наглядное представление о непрерывной и разрывной функциях дают непрерывная и разрывная кривые — графики этих функций (рис. 3.1). Как сформулировать математическое определение непрерывности?

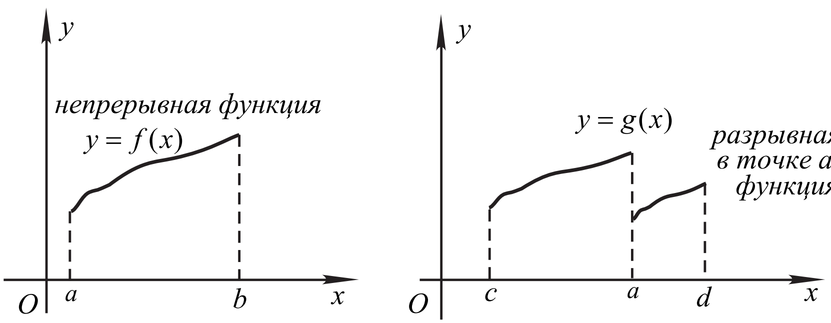



Рис. 3.1.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a$.

**Определение 1.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

**Примеры.**

1) Функция $\sin x$ непрерывна в точке $x = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и было доказано, что

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Таким образом, выполнено условие непрерывности

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0.$$

2) Рациональная функция $P_n(x)/Q_m(x)$ непрерывна в любой точке $a$, в которой $Q_m(a) \neq 0$, так как было доказано, что

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

**Определение 2 (эквивалентное определению 1).** Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \{|x-a| < \delta\} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Отметим, что в этом определении отсутствует условие $0 < |x-a|$ (то есть $x \neq a$), фигурирующее в определении предела функции, поскольку оно здесь является излишним — в точке $x = a$ неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ выполняется для любого $\varepsilon > 0$.

С помощью определения 2 установим одно важное свойство непрерывной функции. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке $a$ и $f(a) > 0$. Возьмем $\varepsilon = f(a)$. Тогда, согласно определению 2, существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon = f(a)$ в $\delta$-окрестности точки $a$, т.е. $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a)$. Из левого неравенства следует, что $f(x) > 0$ в $\delta$-окрестности точки $a$. Тем самым мы доказали, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$ и положительна в этой точке, то она будет положительной и в некоторой окрестности точки $a$ (аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $f(x)$ отрицательна в точке $a$). Это свойство называется *устойчивостью знака* непрерывной функции.

**Задание.**

Установите, верны ли утверждения:

1) если функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$, то функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке $a$?

2) если функция $|f(x)|$ непрерывна в точке $a$, то и функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$?

Если утверждение верно, то его необходимо доказать, если же неверно — привести контрпример.

### Односторонняя непрерывность

Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки $a$, т.е. при $a \leqslant x < a + \delta$.

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке $a$, если

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{(другая форма записи} : f(a+0) = f(a)).$$

Аналогичным образом определяется *непрерывность слева* в точке $a$:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad (\text{или} \quad f(a-0) = f(a)).$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$ (целая часть $x$). Для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем: $f(n+0) = n$, $f(n-0) = n-1$ и $f(n) = n$, поэтому функция $[x]$ непрерывна в точках $x = n$ только справа, а в остальных точках — и справа, и слева.

**Теорема 1.** Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$ слева и справа, то она непрерывна в точке $a$.

Доказательство. По условию

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a).$$

Согласно теореме 1 главы 2 отсюда следует, что существует

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

а это и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке $a$. Теорема доказана.

### Точки разрыва функции

**Определение.** Предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва* функции.

**Примеры.**

1) Функция $f(x) = [x]$ разрывна в точках $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, разрывна во всех точках, так как $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} D(x)$$

не существует (докажите самостоятельно).

3) Функция $f(x) = x \cdot D(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0,$$

и разрывна во всех остальных точках (докажите самостоятельно).

## Классификация точек разрыва

1) **Устранимый разрыв.** Точка $a$ называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b,$$

но в точке $a$ функция $f(x)$ либо не определена, либо $f(a) \neq b$.

Если положить $f(a) = b$, то разрыв будет устранен, т.е. функция станет непрерывной в точке $a$.

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x/x, \quad x \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(это будет вскоре доказано), однако в точке $x = 0$ эта функция не определена. Если положить

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

то функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 0$.

2) **Разрыв 1-ого рода.** Точка $a$ называется *точкой разрыва 1-ого рода* функции $f(x)$, если существуют

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ и } \lim_{x\to a-0} f(x),$$

но они не равны (т.е. $f(a-0) \neq f(a+0)$).

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = [x]$. Точки $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ являются точками разрыва 1-ого рода данной функции, так как $f(n-0) = n-1$, а $f(n+0) = n \neq f(n-0)$.

3) **Разрыв 2-ого рода.** Точка $a$ называется *точкой разрыва 2-ого рода* функции $f(x)$, если в этой точке не существует по крайней мере один из односторонних пределов $f(x)$.

**Примеры.**

1) Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-ого рода функции $\sin\dfrac{1}{x}$, так как оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to -0} \sin\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to +0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существуют.

2) Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2-ого рода функции $2^{1/(x-1)}$, поскольку

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \text{но} \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty \quad \text{(т.е. не существует).}$$

## § 2. Свойства непрерывных функций

**Теорема 2.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при условии $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке $a$.

Доказательство. По условию

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Отсюда следует (согласно теореме 4 главы 2), что

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a), \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = f(a)g(a),$$

и, если выполнено условие $g(a) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$,

а это и означает справедливость утверждения теоремы.

### Понятие сложной функции

Пусть аргумент $t$ функции $y = f(t)$ является не независимой переменной, а функцией некоторой переменной $x$: $t = \varphi(x)$. Тогда говорят, что переменная $y$ является *сложной функцией* переменной $x$ (или *суперпозицией* функций $f$ и $\varphi$) и пишут $y = f(\varphi(x))$.

**Пример.** $y = \sin(x^2)$ — сложная функция: $y = \sin t$, где $t = x^2$.

**Теорема 3.** Пусть функция $t = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$, $\varphi(a) = b$, а функция $y = f(t)$ непрерывна в точке $b$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)),$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ при } |x - a| < \delta.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке $b$, то $\exists \gamma > 0$, такое, что $|f(t) - f(b)| < \varepsilon$ при $|t - b| < \gamma$, откуда следует, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma. \tag{3.1}$$

В свою очередь, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке $a$ для указанного $\gamma$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что если

$$|x-a|<\delta, \text{ то } |f(\varphi(x))-f(\varphi(a))|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

**Пример:** рациональная функция $P_n(x)/Q_m(x)$ непрерывна на любом интервале, на котором $Q_m(x) \neq 0$.

В частности, $f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a,b]$ $(a<b)$, если она непрерывна в каждой внутренней точке сегмента $[a,b]$, непрерывна в точке $a$ справа и в точке $b$ слева.

**Теорема 4.** Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$, то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $f(c)=0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a)<0$, $f(b)>0$. Тогда в силу устойчивости знака непрерывной функции $f(x)<0$ в некоторой правой полуокрестности точки $a$. Рассмотрим множество $X$ таких чисел $\widetilde{x}$ сегмента $[a,b]$, для которых $f(x)<0$ на $[a,\widetilde{x})$, то есть $X=\{\widetilde{x}: f(x)<0 \quad \text{при} \quad a \leqslant x<\widetilde{x}\}$. Это множество ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Пусть $\sup X=c$. Отметим, что

$$\forall x_0<c: f(x_0)<0. \tag{3.3}$$

Действительно, если $x_0<c$, то $x_0$ не является верхней гранью множества $X$ и поэтому существует число $\widetilde{x} \in X$, такое, что $\widetilde{x}>x_0$. Так как $f(x)<0$ на $[a,\widetilde{x})$, то $f(x_0)<0$.

Докажем, что $f(c)=0$. Будем рассуждать от противного.

Допустим, что $f(c)<0$. Тогда $f(x)<0$ в некоторой окрестности точки $c$ и, следовательно, $\exists \widetilde{x}>c$, такое, что $f(x)<0$ на $[a,\widetilde{x})$, а это противоречит тому, что $\sup X=c$.

Допустим теперь, что $f(c)>0$. Тогда $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки $c$, и, следовательно, $\exists x<c: f(x)>0$, что противоречит неравенству (3.3).

Итак, мы заключаем, что $f(c)=0$. Теорема доказана.

**Следствие. (Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.)** Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда $\forall C \in (A,B)\ \exists c \in (a,b)$: $f(c)=C$.

Доказательство. Пусть для определенности $A<B$, $A<C<B$. Введем функцию $g(x)=f(x)-C$. Она непрерывна на сегменте $[a,b]$, причем $g(a)=f(a)-C=A-C<0$,

$g(b) = f(b) - C = B - C > 0$. По теореме 4 существует такая точка $c \in (a, b)$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, откуда $f(c) = C$, что и требовалось доказать.

## § 3. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X$ и $Y$ — множество ее значений. Пусть каждое $y \in Y$ соответствует ровно одному значению $x$ из множества $X$. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между элементами множеств $X$ и $Y$.

Поставим в соответствие каждому $y$ из $Y$ то число $x$ из $X$, для которого $f(x) = y$. Тем самым на множестве $Y$ будет определена функция. Она называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Очевидно, обратной по отношению к функции $x = f^{-1}(y)$ является функция $y = f(x)$. Поэтому эти две функции называются *взаимно обратными*.

**Примеры.**

1) Рассмотрим функцию $y = x^2$, $X = [0, +\infty)$. Множество ее значений $Y = [0, +\infty)$. Обратной по отношению к этой функции будет функция $x = \sqrt{y}$, определенная на множестве $Y$.

2) Рассмотрим теперь функцию $y = x^2$, определенную на множестве $X = (-\infty, +\infty)$. В этом случае, как и в примере 1, $Y \in [0, +\infty)$, но обратной функции не существует, поскольку соответствие, устанавливаемое данной функцией между элементами множеств $X$ и $Y$, не является взаимно однозначным.

**Теорема 5.** Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда: 1) множеством ее значений является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$; 2) на сегменте $Y$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$; 3) обратная функция также строго монотонна; 4) обратная функция непрерывна на сегменте $Y$.

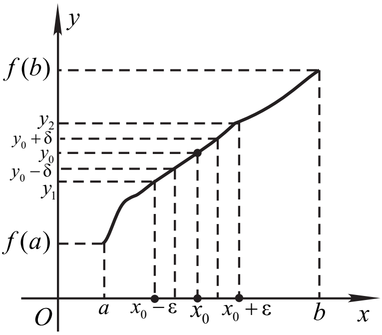



Рис. 3.2.

Доказательство. Пусть (для определенности) функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Все утверждения теоремы наглядно очевидны (рис. 3.2). Проведем аккуратное доказательство.

1) В силу непрерывности функция $y = f(x)$ принимает все значения от $f(a)$ до $f(b)$, а в силу возрастания не имеет значений, меньших $f(a)$ и больших $f(b)$. Таким образом, множество ее значений есть сегмент $Y = [f(a), f(b)]$.

2) Каждое число $y \in Y$ соответствует ровно одному числу $x \in [a, b]$. Действительно, если предположить, что некоторое $y$ из $Y$ соответствует двум числам $x_1$ и $x_2$ из $[a, b]$ (пусть ради определенности $x_1 < x_2$), то получим $f(x_1) = f(x_2) = y$, что противоречит возрастанию функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Следовательно, на сегменте $Y$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

3) Докажем, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на $Y$. Пусть $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$. Нужно доказать, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Положим $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Нужно доказать, что $x_1 < x_2$. Допустим, что $x_1 \geqslant x_2$. Тогда $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ в силу возрастания функции $y = f(x)$, т.е. $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию $y_1 < y_2$. Итак, функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на сегменте $Y$.

4) Остается доказать непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$ на сегменте $Y$. Докажем непрерывность в произвольной внутренней точке $y_0 \in Y$. Пусть $f^{-1}(y_0) = x_0$. Нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ при $|y - y_0| < \delta$, или $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$ для любого значения $y$ из $\delta$-окрестности точки $y_0$.

Возьмем $\varepsilon$ столь малым, что $x_0 - \varepsilon > a$, $x_0 + \varepsilon < b$.

Пусть $f(x_0 - \varepsilon) = y_1$, $f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Поскольку функция $y = f(x)$ возрастающая, то $y_1 < y_0 < y_2$, а в силу возрастания обратной функции $\forall y \in (y_1, y_2)$: $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Возьмем любую $\delta$-окрестность точки $y_0$, которая лежит в интервале $(y_1, y_2)$. Тогда для любого значения $y$ из этой $\delta$-окрестности значения обратной функции будут принадлежать $\varepsilon$-окрестности точки $x_0$, т.е. $\forall y \in \{|y - y_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Непрерывность обратной функции в граничных точках сегмента $Y$ доказывается аналогично.

Теорема 5 полностью доказана.

## § 4. Непрерывность элементарных функций

Используя теорему 5, докажем непрерывность основных элементарных функций.

1) $\boldsymbol{y = \sin x}$ (определение этой функции было дано в школьном курсе математики). Ранее было доказано, что

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

откуда следует непрерывность $\sin x$ в точке $x = 0$.

Докажем непрерывность функции $y = \sin x$ в произвольной точке $x = a \in \mathbb{R}$.

Нужно доказать, что $\sin x \to \sin a$ при $x \to a$, или, что то же самое, $\sin x - \sin a \to 0$ при $x \to a$. Имеем:

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \to 0 \text{ при } x \to a,$$

поскольку первый сомножитель представляет собой бесконечно малую функцию при $x \to a$, а второй —ограниченную функцию.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Она непрерывна и возрастает на этом отрезке (возрастание следует из формулы

$$\left.\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}\right).$$

По теореме 5 множеством значений функции является сегмент

$$Y = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1],$$

на сегменте $Y$ существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x = \arcsin y}$) и эта функция возрастает и непрерывна на сегменте $[-1, 1]$.

2) Вопрос о непрерывности функции $\boldsymbol{y = \cos x}$ и обратной по отношению к ней функции $\boldsymbol{x = \arccos y}$ рассмотрите самостоятельно.

3) $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x}$. Поскольку $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ (где $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$), то данная функция непрерывна во всех точках ее области определения как частное двух непрерывных функций.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$, где $\delta > 0$ — произвольно малое число. Возрастание функции $\operatorname{tg} x$ на этом отрезке вытекает из формулы

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}.$$

По теореме 5 множеством значений данной функции является сегмент $Y = [\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta), \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta)]$, на сегменте $Y$ существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x = \mathrm{arctg}\, y}$), возрастающая и непрерывная.

Поскольку

$$\mathrm{tg}(-\pi/2+\delta) \to -\infty \text{ и } \mathrm{tg}(\pi/2-\delta) \to +\infty \text{ при } \delta \to +0,$$

то $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$, такое, что

$$y \in [\mathrm{tg}(-\pi/2+\delta), \mathrm{tg}(\pi/2-\delta)]\,.$$

Поэтому функция $x = \mathrm{arctg}\, y$ определена, возрастает и непрерывна на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

4) Вопрос о непрерывности функции $\boldsymbol{y = \mathrm{ctg}\, x}$ и обратной по отношению к ней функции $\boldsymbol{x = \mathrm{arcctg}\, y}$ рассмотрите самостоятельно.

5) **Степенная функция** $\boldsymbol{y = x^n}$, где $n$ — натуральное число. Она непрерывна в каждой точке как произведение $n$ непрерывных функций, равных $x$.

Рассмотрим данную функцию на сегменте $[0, a]$, где $a > 0$ — произвольное фиксированное число. Эта функция непрерывна и возрастает на этом сегменте. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = [0, a^n]$, на сегменте $Y$ существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x = \sqrt[n]{y}}$ или $x = y^{1/n}$), возрастающая и непрерывная.

Поскольку $\forall y > 0\ \exists a$, такое, что $y \in [0, a^n]$, то функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, возрастает и непрерывна на полупрямой $[0, +\infty)$.

Итак, $\forall x \geqslant 0$ определена дробная степень $x^{1/n}$. Далее, по определению положим $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, где $m$ — любое целое число.

6) **Показательная функция** $\boldsymbol{y = a^x}$ $(a > 0, a \neq 1)$. Для рациональных $x = m/n$ показательная функция определена выше в п. 5). Из школьного курса алгебры известно, что для рациональных показателей степени $r = m/n$ функция $a^r$ обладает следующими свойствами:

а) если $r_1 > r_2$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
б) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
в) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
г) $a^0 = 1$ (по определению);
д) $a^{-r} = 1/a^r$ (по определению);
е) $a^r b^r = (ab)^r$;
ж) $\forall r$: $a^r > 0$.

Определим теперь $a^x$ для любого вещественного числа $x$.

Пусть $a > 1$, $x$ — произвольное вещественное число. Рассмотрим множество $\{a^r\}$, где $r$ — любое рациональное число, не превосходящее $x$. Это множество ограничено сверху, например, числом $a^{\overline{r}}$, где $\overline{r}$ — любое рациональное число, большее $x$. Следовательно, существует $\sup\{a^r\}$. Положим по определению

$$a^x = \sup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r\leqslant x}}\{a^r\}.$$

Можно определить $a^x$ иначе:

$$a^x = \inf_{\substack{R\in\mathbb{Q}\\ R\geqslant x}}\{a^R\}.$$

**Задание.** Докажите, что оба определения дают один и тот же результат.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$, и для любого $x$ положим $a^x = (1/a)^{-x}$.

Итак, функция $a^x$ определена для любого $x$. Можно доказать, что $a^x$ обладает свойствами а)-ж) для любых вещественных чисел $x$, в частности, функция $a^x$ строго монотонна.

Докажем непрерывность функции $a^x$ в произвольной точке $c$.

Пусть $a > 1$. Докажем сначала непрерывность функции $a^x$ в точке $c$ слева. Для этого нужно доказать, что $\forall\varepsilon > 0$ существует левая полуокрестность точки $c$, в которой $a^c - a^x < \varepsilon$. По определению

$$a^c = \sup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r\leqslant c}}\{a^r\}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $a^c - \varepsilon$. Так как оно меньше $a^c$, то согласно определению точной верхней грани $\exists\widetilde{r} < c$, такое, что $a^{\widetilde{r}} > a^c - \varepsilon$. В силу возрастания $a^x$ справедливо неравенство $a^x > a^{\widetilde{r}}$ при $\widetilde{r} < x \leqslant c$. Поэтому $a^x > a^c - \varepsilon$ при $\widetilde{r} < x \leqslant c$, или, что то же самое, $a^c - a^x < \varepsilon$ при $\widetilde{r} < x \leqslant c$, что и доказывает непрерывность функции $a^x$ в точке $c$ слева.

Аналогично доказывается непрерывность функции $a^x$ в точке $c$ справа. Из непрерывности слева и справа следует непрерывность функции $a^x$ в точке $c$.

Рассмотрим теперь функцию $y = a^x$ на произвольном сегменте $[b, c]$. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = [a^b, a^c]$, на сегменте $Y$ существует обратная функция (она обозначается $\boldsymbol{x = \log_a y}$), строго монотонная и непрерывная.

Поскольку $\forall y > 0\ \exists b$ и $c$, такие, что $y \in [a^b, a^c]$, то функция $x = \log_a y$ определена, строго монотонна и непрерывна на полупрямой $(0, +\infty)$.

Если $a = e$, то $\log_e y := \ln y$ называется *натуральным логарифмом*, а функция $e^x$ называется *экспонентой*.

7) **Степенная функция с произвольным вещественным показателем: $y = x^\alpha$, где $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.** Поскольку $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, то данная функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $y = e^t$ и $t = \alpha \ln x$.

Рассмотренные функции 1)-7) называются *основными элементарными функциями*. Любая функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций, называется просто *элементарной функцией*, а множество всех элементарных функций называется *классом элементарных функций*. Из непрерывности основных элементарных функций следует, что *любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она определена.*

## § 5. Замечательные пределы

### Первый замечательный предел

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(Этот предел является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$).

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (они были доказаны ранее)

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

из которых следует:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\sin x / x$ выписанные неравенства верны также при $-\pi/2 < x < 0$. Перейдем к пределу при

$x \to 0$. Поскольку $\cos x \to 1$ (в силу непрерывности функции $\cos x$) и $1 \to 1$ при $x \to 0$, то, согласно теореме теореме 6 главы 2, $\sin x/x \to 1$ при $x \to 0$, что и требовалось доказать.

**Следствия.**

1) Так как $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то $\sin x - x = o(x)$, откуда получаем простейшую асимптотическую формулу для функции $\sin x$ при $x \to 0$:

$$\sin x = x + o(x).$$

Позднее мы покажем, что здесь $o(x) = -x^3/6 + o\left(x^3\right)$.

2)

$$\cos x = 1 - x^2/2 + o\left(x^2\right) \quad \text{при } x \to 0.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = 1,$$

откуда получаем $1 - \cos x \sim x^2/2 \Rightarrow 1 - \cos x - x^2/2 = o\left(x^2\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos x = 1 - x^2/2 + o\left(x^2\right)$ при $x \to 0$.

3)

$$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

(эту формулу выведите самостоятельно). Позднее мы узнаем, что здесь $o(x) = x^3/3 + o\left(x^3\right)$.

**Примеры.**

1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x + 2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \dfrac{9x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + 2\left(x + o(x)\right)^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{9x^2}{2} + o(x^2) + 2x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{13}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{13}{2}.$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$$

Первая попытка (использование простейших асимптотических формул):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3} = ?$$

Вторая попытка (с помощью первого замечательного предела):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\cdot x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

## Второй замечательный предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

(Этот предел является неопределенностью типа $1^\infty$)

По определению

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Положим $1/n=x$, тогда $n=1/x$, $x\to 0$ при $n\to+\infty$ и мы получаем:

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Однако, это еще не доказывает, что второй замечательный предел имеет место, т.к. при таком подходе $x\to 0$, принимая лишь значения $1/n$, где $n\in\mathbb{N}$, а нужно доказать справедливость предельного равенства при любом способе стремления $x$ к нулю, в том числе и когда $x$ принимает отрицательные значения.

Введем функцию

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},\quad x\geqslant 1.$$

Так как $f(x)=(1+1/n)^n$ при $n\leqslant x<n+1$, то

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Воспользуемся неравенствами (при $x \geqslant 1$):

$$[x] \leqslant x \leqslant [x]+1=[x+1] \Rightarrow \frac{1}{[x+1]} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{[x]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{[x+1]} \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{[x]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{-1} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x]}\right).$$

Перейдем к пределу при $x \to +\infty$. Левая и правая части последнего двойного неравенства, очевидно, стремятся к $e$. Следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Положим $y = 1/x$. Тогда $y \to +0$ при $x \to +\infty$ и мы получаем:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y \to +0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Ради удобства перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{x \to +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{3.4}$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x \to -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{3.5}$$

Положим $y = -x$. Тогда $y \to +0$ при $x \to -0$ и

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Пусть $z = y/(1-y)$. Тогда если $y \to +0$, то $z \to +0$. Кроме того, $y = z/(1+z)$ и $1/y = 1/z + 1$. Поэтому

$$\lim_{x \to -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +0} (1+z)^{\frac{1}{z}} \cdot (1+z) = e \cdot 1 = e,$$

то есть выполнено равенство (3.5).

Из (3.4) и (3.5) следует:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

что и требовалось доказать.

**Примеры.**

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Отсюда вытекает, что $\log_a(1+x) \sim x/\ln a$ при $x\to 0$, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \quad \text{при } x\to 0. \tag{3.6}$$

В частности, для $a = e$ получаем формулу

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{при } x\to 0.$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

Здесь была сделана замена $a^x - 1 = y$, при этом $y\to 0$, если $x\to 0$. Следовательно, $a^x - 1 \sim x\ln a$ при $x\to 0$, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad \text{при } x\to 0. \tag{3.7}$$

В частности, для $a = e$ получаем формулу

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{при } x\to 0.$$

# Глава 4
# ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

## § 1. Определение производной. Производные некоторых основных элементарных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a, b)$. Зафиксируем какую-нибудь точку $x$ из $(a, b)$ и рассмотрим другую точку $x + \Delta x$ этого интервала. Величину $\Delta x$ назовем *приращением аргумента* функции в точке $x$. Составим разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

При фиксированной точке $x$ эта разность является функцией аргумента $\Delta x$. Она называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке $x$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оно также является функцией аргумента $\Delta x$.

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке $x$.

Обозначения производной: $f'(x)$ или $y'(x)$.
В физике часто используется обозначение $\dot{y}(x)$, обычно в том случае, когда $x$ — время. Несколько позже мы введем еще одно обозначение: $\dfrac{dy}{dx}$, но это будет не единый символ, а дробь, в которой числитель и знаменатель имеют свой смысл.

**Примеры.**

1) Постоянная функция $y = c$, где $c$ — некоторое число. Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad \text{то есть} \quad c' = 0.$$

2) Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + nx^{n-1}\cdot\Delta x + n(n-1)x^{n-2}\times(\Delta x)^2/2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n =$$
$$= nx^{n-1}\cdot\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to nx^{n-1} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

то есть

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Позднее мы докажем, что эта формула верна для любого вещественного числа $n$ и любого $x > 0$.

3) Функция $y = \sin x$. Имеем:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Здесь мы воспользовались формулой $\sin\frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Используя теперь непрерывность функции $\cos x$, получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(1 + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

4) Докажите самостоятельно, что

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

5) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(x > 0)$. Так как

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

то, применяя формулу (3.6), получаем:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x \ln a} + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to \frac{1}{x \ln a} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a),$$

в частности,

$$(\ln x)' = 1/x.$$

6) Показательная функция $y = a^x \quad (a > 0; a \neq 1)$. Используя формулу (3.7), получаем

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x(\Delta x \cdot \ln a + o(\Delta x)) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \left( \ln a + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) \to a^x \cdot \ln a \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

## Односторонние производные

Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x > 0.$$

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется *правой производной* функции $y = f(x)$ в точке $x$. Обозначение: $f'_{\text{пр}}(x)$.

Аналогично определяется *левая производная* функции $y = f(x)$ в точке $x$:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{\text{лев}}(x).$$

Функция $y = f(x)$ может иметь в какой-то точке не равные односторонние производные.

**Пример.** Рассмотрим функцию $y = |x|$. В точке $x = 0$ имеем:

$$\Delta y = y(0 + \Delta x) - y(0) = \begin{cases} \Delta x, & \text{если } \Delta x > 0 \\ -\Delta x, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases},$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, правая производная функции $y = |x|$ в точке 0 равна 1, а левая производная равна $-1$. Производной в этой точке функция $y = |x|$ не имеет.

### Частные производные

Рассмотрим функцию не одной, а нескольких переменных, например, $z = f(x, y)$. Если зафиксировать значение одной из переменных, например $y$, то функция $z$ станет функцией одной переменной $x$. Производная этой функции называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по аргументу $x$ и обозначается $z'_x$. Аналогично определяется частная производная $z'_y$ по аргументу $y$.

**Пример.** Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $z'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = x^y \cdot \ln x$.

## § 2. Физический и геометрический смысл производной

### Физический смысл производной

Пусть $x$ — время, а $y = f(x)$ — координата точки, движущейся по оси $Oy$, в момент времени $x$.

Разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

представляет собой *среднюю скорость* точки на промежутке времени от момента $x$ до момента $x + \Delta x$, а величина

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = v(x)$$

является *мгновенной скоростью* точки в момент времени $x$.

В случае произвольной функции $y = f(x)$ производная $f'(x)$ характеризует *скорость* изменения переменной $y$ (функции) по отношению к изменению аргумента $x$.

## Геометрический смысл производной

Пусть задана прямоугольная система координат и дана прямая $l$. Обозначим буквой $\alpha$ величину угла,на который нужно повернуть ось $Ox$, чтобы совместить ее положительное направление с одним из направлений на прямой $l$, причем $-\pi/2 < \alpha \leqslant \pi/2$ (рис. 4.1). Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой $l$ в данной системе координат.

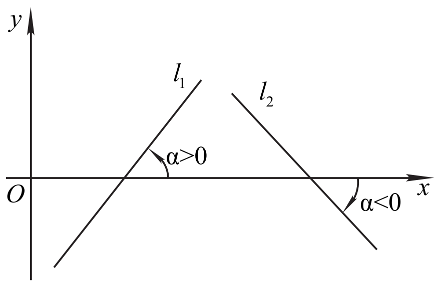



Рис. 4.1.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, т.е. множество точек $\{(x, f(x)),\ x \in X\}$, где $X$ —область определения этой функции. Отметим на графике точки $M(x, f(x))$ и $N(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Прямая $MN$ называется *секущей* по отношению к графику функции. Величину угла между секущей $MN$ и осью $Ox$ обозначим $\varphi(\Delta x)$ (рис. 4.2). Устремим теперь $\Delta x$ к нулю.

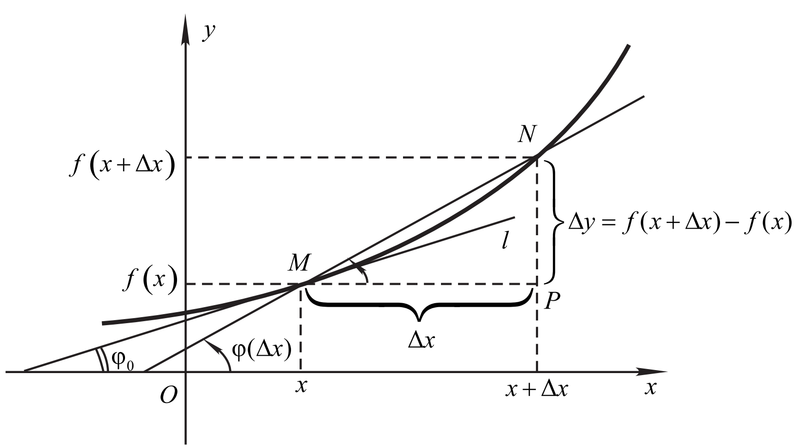



Рис. 4.2.

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0,$$

то прямая $l$ с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, проходящая через точку $M(x, f(x))$, называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M$.

Говорят также, что прямая $l$ является предельным положением секущей $MN$ при $\Delta x \to 0$. В соответствии с этим можно сказать, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$ есть предельное положение секущей $MN$ при $\Delta x \to 0$.

**Теорема 1.** Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x$ производную $f'(x)$, то график функции имеет в точке $M(x, f(x))$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$.

Доказательство. Из треугольника $MNP$ (см. рис. 4.2) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользуемся тем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

и $\operatorname{arctg} t$ —непрерывная функция. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x).$$

Отсюда по определению касательной следует, что существует касательная к графику функции в точке $M(x, f(x))$. При этом

$$\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x),$$

и, следовательно, для углового коэффициента касательной получаем равенство $k = \operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x)$. Теорема доказана.

Отметим, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

## § 3. Дифференцируемость и дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, то есть
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$
Введем функцию
$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x). \tag{4.1}$$
Функция $\alpha(\Delta x)$ определена при $\Delta x \neq 0$ и является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Из равенства (4.1) получаем:
$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0. \tag{4.2}$$
Равенство (4.2) будет верным и для $\Delta x = 0$, если доопределить каким-нибудь образом функцию $\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x = 0$. Для дальнейшего удобно положить $\alpha(0) = 0$, то есть доопределить $\alpha(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ по непрерывности. Отметим также, что $f'(x)$ не зависит от $\Delta x$, т.е. для данной точки $x$ является некоторым числом.

Итак, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, то ее приращение в этой точке можно представить в виде (4.2), где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\alpha(0) = 0$.

Пусть теперь дано, что приращение функции $y = f(x)$ в точке $x$ имеет вид
$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{4.3}$$
где $A$ — некоторое число, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\alpha(0) = 0$. Покажем, что в этом случае функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, причем $f'(x) = A$. Из (4.3) получаем:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$
откуда следует, что
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = A.$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, то ее приращение в этой точке можно представить в виде (4.3), где $A = f'(x)$, и обратно, если приращение функции в точке $x$ можно представить в виде (4.3), то она имеет в точке $x$

производную, причем $f'(x) = A$, т.е. *существование производной функции в точке $x$ и представление приращения функции в виде (4.3) являются эквивалентными свойствами функции.*

**Определение.** Если приращение функции $y = f(x)$ в точке $x$ можно представить в виде (4.3), где $A$ — некоторое число, а $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\alpha(0) = 0$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке $x$.

Из проведенного рассуждения следует, что *для дифференцируемости функции в точке $x$ необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.*

Операцию вычисления производной называют *дифференцированием* функции.

Замечание. Условие дифференцируемости (4.3) с учетом равенств $A = f'(x)$, $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, можно записать в виде

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{4.4}$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $y = x^2$. Имеем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Здесь $A = f'(x) = 2x$.

**Теорема 2.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $a$, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Введем обозначение: $x - a = \Delta x$. Тогда $\Delta x \to 0$ при $x \to a$, $x = a + \Delta x$, и нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = f(a) \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta x \to 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0.$$

Но $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y$ — приращение функции в точке $a$. Таким образом, требуется доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

По условию теоремы функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $a$, поэтому

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

где $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, называется *разностной формой условия непрерывности функции* $y = f(x)$ *в точке* $a$. Если это условие выполнено, то функция непрерывна в точке $a$, и обратно, если функция непрерывна в точке $a$, то это условие выполнено.

Отметим также, что обратное к теореме 2 утверждение неверно, т.е. непрерывная в некоторой точке функция может быть недифференцируемой в этой точке.

**Пример.** Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Существуют функции, которые непрерывны в каждой точке числовой прямой, но ни в одной точке не дифференцируемы. Впервые пример такой функции построил Карл Вейерштрасс (1815-1897) в 1872 году.

## Дифференциал функции

Обратимся снова к условию дифференцируемости функции, записанному в виде (4.4): $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. Приращение $\Delta y$ дифференцируемой в точке $x$ функции $y = f(x)$ состоит из двух слагаемых: $f'(x) \cdot \Delta x$ и $o(\Delta x)$. Оба слагаемых являются бесконечно малыми функциями при $\Delta x \to 0$. Если $f'(x) \neq 0$, то первое слагаемое является бесконечно малой того же порядка, что и $\Delta x$: $f'(x) \cdot \Delta x = O(\Delta x)$. Второе слагаемое $o(\Delta x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$.

**Определение.** *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке $x$ называется линейная функция аргумента $\Delta x$:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{4.5}$$

Отметим, что если $f'(x) \neq 0$, то $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ является главной частью $\Delta y$ при $\Delta x \to 0$. Если же $f'(x) = 0$, то $dy = 0$ и уже не является главной частью приращения функции.

*Дифференциалом независимой переменной* $x$ назовем приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Формула (4.5) принимает теперь вид: $dy = f'(x)dx$, откуда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т.е. если $x$ — независимая переменная, то производная функции в точке $x$ равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.

**Пример.** Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Найдем ее дифференциал: $dy = d(\sin x) = \cos x \cdot dx$ — линейная функция аргумента $dx$ при фиксированном $x$. В частности,

$$d(\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}dx; \quad d(\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3},dx=0,1} = 0,05; \quad d(\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

### Физический смысл дифференциала функции

Пусть $x$ — время, $y = f(x)$ — координата точки на оси $Oy$ в момент времени $x$. Тогда $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — изменение (приращение) координаты за промежуток времени от момента $x$ до момента $x + \Delta x$. При этом $dy = f'(x) \cdot \Delta x = v(x) \cdot \Delta x$, то есть дифференциал равен тому изменению координаты, которое имела бы точка, если бы ее скорость $v(x)$ на отрезке времени $[x, x + \Delta x]$ была постоянной, равной $f'(x)$.

### Геометрический смысл дифференциала функции

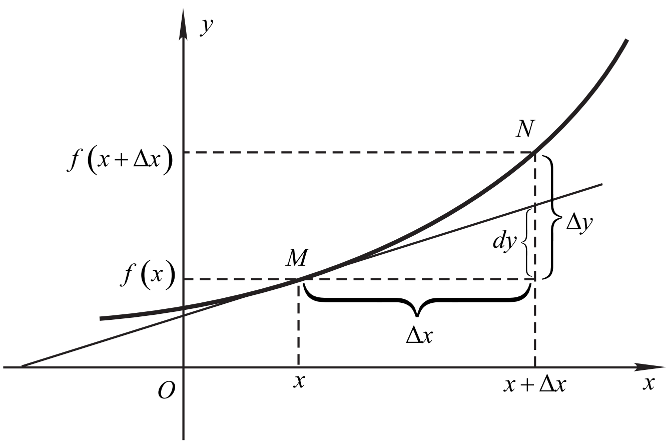



Рис. 4.3.

Дифференциал $dy$ равен тому изменению функции $y = f(x)$ при изменении аргумента на $\Delta x$, которое имела бы функция, если бы на отрезке $[x, x + \Delta x]$ она была линейной с угловым коэффициентом прямой (ее графика), равным $f'(x)$ (см. рис. 4.3).

### Использование дифференциала для приближенных вычислений

С помощью формулы $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ можно приближенно вычислять $f(x+\Delta x)$ при малых $\Delta x$, если известны $f(x)$ и $f'(x)$. В самом деле, из равенства

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

следует:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

откуда получаем приближенное равенство

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x.$$

## § 4. Правила дифференцирования

**Теорема 3.** Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то функции $u(x)\pm v(x), u(x)\cdot v(x), u(x)/v(x)$ (где $v(x)\neq$ $= 0$) также дифференцируемы в точке $x$, причем:

1) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$;

2) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$;

3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Доказательство. Докажем формулу 2) (формулы 1) и 3) докажите самостоятельно). Положим $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) + u(x)v(x+\Delta x) - \\ -u(x)v(x+\Delta x) = [u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x) + \\ +u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u\cdot v(x+\Delta x) + \Delta v\cdot u(x).\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u(x).$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x)u'(x) + u(x)v'(x),$$

то есть $y'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, что и требовалось доказать.

**Следствия.**

(1) $[c \cdot y(x)]' = c \cdot y'(x), \quad$ где $\quad c = const$;

(2) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

(3) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (докажите самостоятельно).

## § 5. Производная обратной функции

**Теорема 4.** Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки $x_0$, дифференцируема в самой точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$. Пусть $f(x_0) = y_0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, эта функция дифференцируема в точке $y_0$ и

$$f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

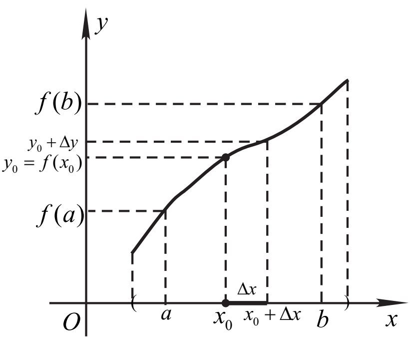



Рис. 4.4.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь сегмент $[a, b]$, расположенный в указанной окрестности точки $x_0$ и такой, что $a < x_0 < b$. Функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на этом сегменте (рис. 4.4). Поэтому, согласно теореме 5 главы 3, множеством значений функции $y = f(x)$, заданной на $[a, b]$, является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$, на сегменте $Y$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго монотонная и непрерывная. При этом $y_0 \in (f(a), f(b))$.

Дадим аргументу $y$ обратной функции в точке $y_0$ приращение $\Delta y \neq 0$ столь малое, что $(y_0 + \Delta y) \in (f(a), f(b))$. Обратная функция получит приращение $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$, которое отлично от нуля в силу строгой монотонности обратной функции: $\Delta x \neq 0$. Поэтому справедливо равенство:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}. \tag{4.6}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta y \to 0$ и воспользуемся непрерывностью обратной функции $x = f^{-1}(y)$ и условием непрерывности в разностной форме: $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Так как при $\Delta x \to 0$ знаменатель в правой части (4.6) стремится к $f'(x_0)$, то предел правой части равен $\frac{1}{f'(x_0)}$. Следовательно, существует предел и левой части равенства (4.6), который по определению производной равен ${f^{-1}}'(y_0)$. Таким образом, переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ в равенстве (4.6), мы получаем:

$${f^{-1}}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

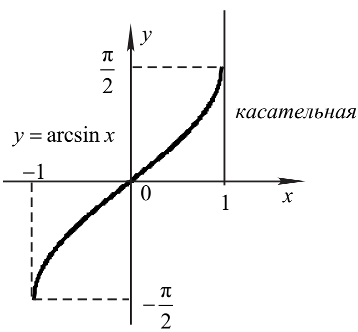



Рис. 4.5.

Замечание. Полученная формула для производной обратной функции имеет простой и ясный физический смысл. Производная $f'(x_0)$ есть скорость изменения переменной $y$ по отношению к изменению переменной $x$ в точке $x_0$. Это означает, что при малом изменении $x$ от $x_0$ до $x_0 + \Delta x$, т.е. при изменении $x$ на малую величину $\Delta x$, переменная $y$ изменится на величину $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Можно сказать, что $y$ изменяется в $f'(x_0)$ раз «быстрее», чем $x$. Но тогда $x$ изменяется в $1/f'(x_0)$ раз «медленнее», чем $y$: $\Delta x \approx \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \Delta y$, то есть скорость изменения переменной $x$ по отношению к изменению переменной $y$ (а эта скорость и есть ${f^{-1}}'(y_0)$) равна $1/f'(x_0)$.

**Примеры.**

1) Рассмотрим функцию $y = \sin x$ при $-\pi/2 < x < \pi/2$. Эта

функция имеет обратную: $x = \arcsin y$, $-1 < y < 1$. Для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполнены условия теоремы 4, согласно которой

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ -1 < y < 1.$$

Запишем эту формулу, заменив $y$ на $x$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1.$$

Замечание. При $x \to +1$ (и также при $x \to -1$) имеем: $(\arcsin x)' \to +\infty$. В таком случае говорят, что функция имеет в данной точке бесконечную производную. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке — это прямая, параллельная оси $Oy$ (рис 4.5).

2) Самостоятельно выведите формулу

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

3) Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Эта функция имеет обратную: $x = \operatorname{arctg} y$, $-\infty < y < +\infty$. Для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполнены условия теоремы 4, согласно которой

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Запишем эту формулу, заменив $y$ на $x$:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4) Самостоятельно выведите формулу

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## § 6. Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y = f(t)$, где $t = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x)) := F(x)$.

**Теорема 5.** Пусть функция $t = \varphi(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, $\varphi(x_0) = t_0$, и функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке

$t_0$. Тогда сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x_0$ и выполняется равенство:

$$F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости функции нужно доказать, что приращение функции $y = F(x)$ в точке $x_0$ можно представить в виде:

$$\Delta y = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{4.7}$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\alpha(0) = 0$.

Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$ в точке $x_0$. Функция $t = \varphi(x)$ получит приращение $\Delta t = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, которое можно представить в виде (в силу дифференцируемости функции $t = \varphi(x)$ в точке $x_0$):

$$\Delta t = \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{4.8}$$

где $\beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\beta(0) = 0$.

Этому приращению $\Delta t$ переменной $t$ соответствует приращение $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ функции $y = f(t)$. Поскольку функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке $t_0$, то $\Delta y$ можно представить в виде

$$\Delta y = f'(t_0) \cdot \Delta t + \gamma(\Delta t) \cdot \Delta t, \tag{4.9}$$

где $\gamma(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$ и $\gamma(0) = 0$.

Подставив выражение (4.8) для $\Delta t$ в равенство (4.9), получим:

$$\Delta y = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + [\beta \cdot f'(t_0) + \gamma \cdot \varphi'(x_0) + \gamma\beta]\, \Delta x =$$

$$= f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

т.е. мы получили равенство (4.7), причем $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\alpha(0) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Полученная формула имеет простой и ясный физический смысл: $\varphi'(x_0)$ —скорость изменения переменной $t$ по отношению к изменению переменной $x$, $f'(t_0)$ —скорость изменения $y$ по отношению к изменению $t$, а $F'(x_0)$ —скорость изменения $y$ по отношению к изменению $x$. Ясно, что эти скорости связаны равенством: $F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

**Примеры.**

1) Рассмотрим функцию

$$y = x^{\alpha},$$

где $\alpha$ — произвольное фиксированное вещественное число, $x > 0$. Для этой функции справедливо представление: $x^{\alpha} = e^{(\alpha \ln x)} = e^{t}$, где $t = \alpha \ln x$. По формуле производной сложной функции

$$(x^{\alpha})' = (e^{t})' \cdot (\alpha \ln x)' = e^{t} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак, при $x > 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Отметим два частных случая этой формулы:

$$(\sqrt{x}\,)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2) Найдем производную функции

$$y = \ln\cos(\operatorname{arctg} e^{x}).$$

Она является суперпозицией четырех функций, поэтому ее производная состоит из четырех сомножителей:

$$y' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arctg} e^{x})} \cdot (-\sin(\operatorname{arctg} e^{x})) \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^{x} =$$

$$= -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} e^{x}) \cdot \frac{e^{x}}{1+e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

3) Вычислим производную так называемой степенно-показательной функции

$$y(x) = [u(x)]^{v(x)}, \quad \text{где} \quad u(x) > 0.$$

Так как $y = e^{v \ln u}$, то $y' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v \cdot \dfrac{1}{u} \cdot u'\right) = u^{v} \ln u \cdot v' + {}$ $+ v u^{v-1} \cdot u'$, или

$$(u^{v})' = (u^{v})'\Big|_{u=const} + (u^{v})'\Big|_{v=const}.$$

## § 7. Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$, где $x$ — независимая переменная, выражается формулой

$$dy = f'(x)dx, \tag{4.10}$$

здесь $dx = \Delta x$ является приращением независимой переменной $x$. Дифференциал функции $dy$ называется также *первым дифференциалом функции.*

Покажем, что формула (4.10) останется в силе и тогда, когда $x$ будет не независимой переменной, а дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной $t$: $x = \varphi(t)$. В этом случае $y = f(\varphi(t)) := F(t)$ — сложная функция независимой переменной $t$, дифференцируемая в силу теоремы 5. Согласно определению дифференциала функции $dy = F'(t)dt$, а по теореме 5 $F'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, поэтому $dy = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$. Так как $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, то выражение для $dy$ также можно записать в виде (4.10), то есть формула (4.10) имеет место и в том случае, когда $x$ — дифференцируемая функция некоторого аргумента $t$.

Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*. Отметим, что инвариантной (не изменяющейся) является только форма (вид) первого дифференциала, а суть меняется, поскольку теперь $dx = \varphi'(t)dt \neq \Delta x$. Из (4.10) следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \tag{4.11}$$

т.е. производная функции равна отношению дифференциалов функции и аргумента и в том случае, когда аргумент $x$ — не независимая переменная, а функция некоторой независимой переменной $t$.

**Следствие из формулы (4.11).** Пусть переменные $x$ и $y$ заданы как функции аргумента $t$, который назовем *параметром*:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{4.12}$$

Пусть параметр $t$ изменяется на некотором промежутке и пусть существует функция $t = \varphi^{-1}(x)$, обратная к функции $x = \varphi(t)$. Тогда можно записать: $y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) := f(x)$.

Таким образом, уравнения (4.12) определяют функцию $y = f(x)$. Такой способ задания функции называется *параметрическим* заданием функции.

Вычислим $f'(x)$. По формуле (4.11):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Итак, мы получили формулу производной функции, заданной параметрически:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Эту же формулу можно получить иначе, если использовать правило дифференцирования сложной функции и формулу производной обратной функции:

$$y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \Rightarrow f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \Big(\varphi^{-1}(x)\Big)' =$$

$$= \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

**Физическая интерпретация.**

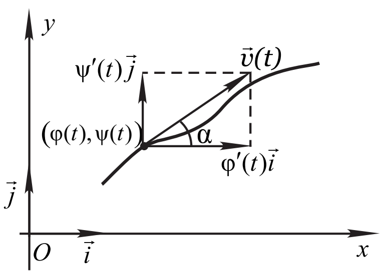



Рис. 4.6.

Уравнения (4.12) можно рассматривать как уравнения, задающие движение точки на плоскости: $t$ — время, $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ — координаты точки в момент времени $t$ (рис. 4.6).

При такой интерпретации график функции $y = f(x)$ представляет собой траекторию движения точки на плоскости. Вектор скорости этой точки $\vec{v}(t) = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}$ направлен по касательной к траектории, так как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f'(x).$$

## § 8. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a, b)$. Тогда производная $f'(x)$ является функцией, определенной на интервале $(a, b)$. Если $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x$ из $(a, b)$, то *производная от* $f'(x)$ *в точке* $x$ *называется второй производной функции* $f(x)$ *в точке* $x$ (или *производной второго порядка*) и обозначается $f''(x)$ (другие обозначения: $f^{(2)}(x)$, $y''(x)$, $y^{(2)}(x)$).

*Производная* $n$*-ого порядка* (или $n$*-я производная*) функции $y = f(x)$ определяется как производная от производной $(n-1)$-ого порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

### Физический смысл второй производной

Если $x$ —время, а $y = f(x)$ — координата точки на оси $Oy$ в момент времени $x$, то $f'(x) = v(x)$ — мгновенная скорость точки в момент $x$, а $f''(x) = [f'(x)]' = v'(x) = a(x)$ — ускорение точки в момент $x$.

### Геометрический смысл второй производной

Позже будет установлено, что знак $f''(x)$ определяет направление выпуклости графика функции $y = f(x)$ (рис. 4.7).

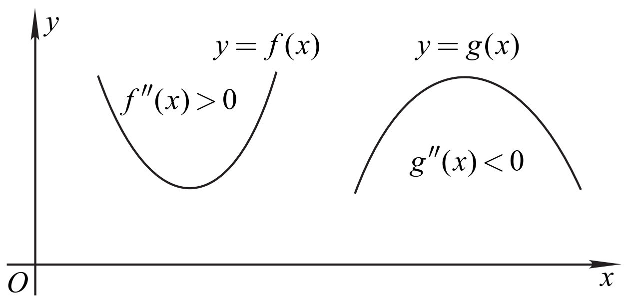



Рис. 4.7.

**Примеры.**

1) $y = x^{\alpha}$.

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

и т.д. Для производной $n$-ого порядка получается выражение

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

(строгое доказательство проведите самостоятельно по индукции). В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)\times\dots\times 1\cdot x^0 = m!, \quad (x^m)^{(n)} = 0 \quad \forall n > m.$$

2) $y = a^x$.

$$y' = a^x \ln a,$$
$$y'' = a^x(\ln a)^2,$$

и т.д. Производная $n$-ого порядка выражается формулой

$$y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

(строгое доказательство проведите самостоятельно по индукции). В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

3) $y = \sin x$.

$$y' = \cos x = \sin(x+\pi/2),$$
$$y'' = \sin(x+2\pi/2),$$

и т.д. Производная $n$-ого порядка выражается формулой

$$y^{(n)} = \sin(x+n\pi/2)$$

(строгое доказательство проведите самостоятельно по индукции).

4) Докажите самостоятельно, что $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\pi/2)$.

### Две формулы для производных $n$-ого порядка

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные $n$-ого порядка, то функции $u(x)\pm v(x)$, $u(x)v(x)$ также имеют производные $n$-ого порядка, причем:

$$(u(x)\pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x). \tag{4.13}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + C_n^1\cdot u^{(n-1)}v' + C_n^2\cdot u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots +$$
$$+ C_n^k\cdot u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + u\cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot u^{(n-k)}v^{(k)}, \tag{4.14}$$

где $u^{(0)} := u$, $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$, $n! = 1\cdot 2\cdot\dots n$, $0! = 1$. Эта формула называется *формулой Лейбница*.

Для $n = 2$ получаем:

$$(u(x) \pm v(x))^{(2)} = \Big[(u(x) \pm v(x))'\Big]' = \Big[u'(x) \pm v'(x)\Big]' = \\ = u^{(2)}(x) \pm v^{(2)}(x),$$

то есть для $n = 2$ формула (4.13) верна.
Справедливость этой формулы для любого $n \in \mathbb{N}$ докажите самостоятельно методом математической индукции.

Заметим, что равенство (4.14) по форме похоже на формулу бинома Ньютона:

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{n-k} v^k.$$

Справедливость формулы Лейбница также докажите самостоятельно по индукции. Предварительно нужно доказать формулу:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

**Пример**. Рассмотрим функцию $y = x^2 \cdot e^{3x}$. Используя формулу (4.14), найдем $y^{(10)}$:

$$y^{(10)} = (e^{3x})^{(10)} \cdot x^2 + C_{10}^1 \cdot (e^{3x})^{(9)} \cdot (x^2)' + \\ + C_{10}^2 \cdot (e^{3x})^{(8)} \cdot (x^2)'' + \ldots = 3^{10} \cdot e^{3x} \cdot x^2 + 10 \cdot 3^9 \cdot e^{3x} \cdot 2x + \\ + \frac{10 \cdot 9}{2} e^{3x} \cdot 3^8 \cdot 2 = 3^9 \cdot e^{3x}(3x^2 + 20x + 30).$$

## § 9. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$, т.е. дифференцируема в каждой точке этого интервала. Если $x$ — независимая переменная, то первый дифференциал функции выражается формулой

$$dy = f'(x)dx.$$

Если $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция независимой переменной $t$, то

$$dy = f'(x)dx = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

В каждом из двух случаев $dy$ является функцией двух переменных — независимой переменной ($x$ или $t$) и ее дифференциала ($dx$ или $dt$), который входит в виде сомножителя. При введении дифференциала второго порядка мы будем рассматривать $dy$ как функцию только независимой переменной ($x$ или $t$), то есть дифференциал независимой переменной ($dx$ или $dt$) будем рассматривать как постоянный множитель в выражении для $dy$. Такую же договоренность примем при определении дифференциалов более высокого порядка.

При этом условии определим *дифференциал второго порядка* (или *второй дифференциал*) $d^2y$ функции $y = f(x)$ как дифференциал от первого дифференциала, т.е.

$$d^2y = d(dy),$$

и, кроме того, при вычислении дифференциала от $dy$ приращение дифференциала независимой переменной ($x$ или $t$) будем снова брать равным $dx$ или $dt$.

*Дифференциал $n$-ого порядка* $d^ny$ ($n \geqslant 2$) определим формулой

$$d^ny = d(d^{n-1}y),$$

сохранив договоренность в отношении дифференциала независимой переменной.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x$ является независимой переменной, тогда $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$ — приращение независимой переменной. Далее, согласно определению,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = dx \cdot \Big[d(f'(x))\Big] = dx \cdot \Big[(f'(x))'dx\Big] = \\ = f^{(2)}(x)(dx)^2,$$

$$d^3y = d(d^2y) = (dx)^2 d\Big[f^{(2)}(x)\Big] = (dx)^2 \cdot f^{(3)}(x)dx = f^{(3)}(x)(dx)^3,$$

и т.д. По индукции несложно доказать общую формулу для любого $n$:

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Из этой формулы вытекает, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

т.е. производная $n$-го порядка функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала $n$-го порядка функции к $n$-й степени дифференциала независимой переменной.

**Пример.** $y = \sin x$. Найдем $d^{20}y$:

$$d^{20}(\sin x) = (\sin x)^{(20)} \cdot (dx)^{(20)} = \sin(x + 20 \cdot \pi/2)(dx)^{20} =$$
$$= \sin x \cdot (dx)^{20}.$$

2. Пусть теперь $x$ — функция некоторой независимой переменной $t$: $x = \varphi(t)$. В этом случае

$$dx = \varphi'(t)dt, \;\; dy = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

и далее получаем:

$$d^2y = d(dy) = dt \cdot d\Big(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\Big) = dt \cdot \Big(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\Big)' dt =$$
$$= \Big[f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t))^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)\Big] dt^2 =$$
$$= f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t)dt)^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)dt^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким образом, *форма второго дифференциала не инвариантна*. Это же относится к дифференциалам более высокого порядка.

## § 10. Производные вектор-функции

Если каждому числу $t$ из множества $T$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{r}$, то говорят, что на множестве $T$ задана векторная функция (или *вектор-функция*) $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Модуль вектора $\vec{r}(t)$ будем обозначать, как обычно, $|\vec{r}(t)|$. Отметим, что $|\vec{r}(t)|$ — скалярная функция аргумента $t$.

**Определение.** Вектор $\vec{a}$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a \quad \text{или} \quad \vec r(t)\to\vec a \quad \text{при} \quad t\to t_0.$$

Зафиксируем значение аргумента $t$ и дадим ему приращение $\Delta t\neq 0$. Вектор-функция получит приращение

$$\Delta\vec r=\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t).$$

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t},$$

то он называется *производной* вектор-функции $\vec r(t)$ в точке $t$.

Обозначение: $\vec{r'}(t)$ или $d\vec r/dt$.

Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$ и введем базис $\{\vec i,\vec j,\vec k\}$. Разложим вектор $\vec r(t)$ по этому базису:

$$\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k=\{x(t),y(t),z(t)\};$$

$$|\vec r(t)|=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}\,.$$

**Утверждение.** Для того, чтобы $\vec r(t)\to\vec a=\{a_1,a_2,a_3\}$ при $t\to t_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$x(t)\to a_1,\quad y(t)\to a_2,\quad z(t)\to a_3 \quad \text{при} \quad t\to t_0.$$

Доказательство несложно провести, используя равенство

$$|\vec r(t)-\vec a|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\,.$$

Из этого утверждения, в частности, следует, что

$$\frac{d\vec r}{dt}=x'(t)\vec i+y'(t)\vec j+z'(t)\vec k=\{x'(t),y'(t),z'(t)\},$$

т.е. вычисление производной вектор-функции сводится к вычислению производных ее координат.

**Определение.** Множество концов всех векторов $\vec r(t)$ $(t\in T)$, отложенных от начала координат (точки O), называется *годографом* вектор-функции $\vec r=\vec r(t)$ (рис. 4.8).

**Физический смысл годографа** — это траектория точки, движение которой в пространстве задано уравнением $\vec r=\overrightarrow{OM}=\vec r(t)$.

**Физический смысл производной** $d\vec r/dt$ — это скорость точки. Можно доказать, что вектор $d\vec r/dt$ является касательным к годографу.

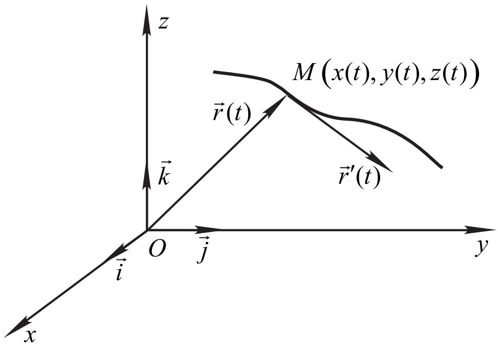



Рис. 4.8.

## Правила дифференцирования вектор-функций

1) $\left[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r'}_1(t) \pm \vec{r'}_2(t);$

2) $\left[f(t) \cdot \vec{r}(t)\right]' = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot \vec{r'}(t);$

3) $\left(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r'}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r'}_2(t);$

4) $\left[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)\right]' = \left[\vec{r'}_1(t) \times \vec{r}_2(t)\right] + \left[\vec{r}_1(t) \times \vec{r'}_2(t)\right].$

Здесь $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ — скалярное произведение, а $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$ — векторное произведение векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.
Эти правила нетрудно обосновать, используя выражения для $\vec{r}_1 \pm \pm \vec{r}_2, \ldots, [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$ в координатах.

Производные высших порядков вектор-функции вводятся, как и для скалярной функции:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right), \ldots, \vec{r}^{(n)}(t) = \left[\vec{r}^{(n-1)}(t)\right]'.$$

В координатах:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}.$$

**Пример 1.** Рассмотрим прямую (ось вращения) и вектор $\vec{a}$ с началом на этой прямой, составляющий угол $\alpha$ с прямой. Пусть вектор $\vec{a}$ вращается вокруг прямой с постоянной угловой скоростью $\omega$, причем угол $\alpha$ и длина вектора $\vec{a}$ остаются неизменными.

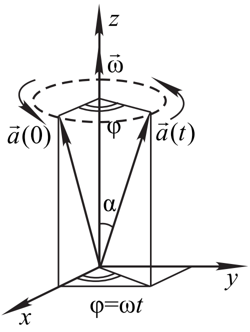



Рис. 4.9.

Положим $|\vec{a}| = a$ и введем вектор $\vec{\omega}$, у которого $|\vec{\omega}| = \omega$, а направление показано на рис. 4.9.

Вектор $\vec{a}$ зависит от времени: $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Докажем, что

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы положительное направление оси $Oz$ совпало с направлением вектора $\vec{\omega}$, и запишем координаты вектора $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \{a \sin\alpha \cdot \cos\omega t, a \sin\alpha \cdot \sin\omega t, a \cos\alpha\}.$$

Введем обозначения: $a \sin\alpha = b, a \cos\alpha = c$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \{-b\omega \sin\omega t, b\omega \cos\omega t, 0\},$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{a}(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b\cos\omega t & b\sin\omega t & c \end{vmatrix} = \{-b\omega \sin\omega t, b\omega \cos\omega t, 0\},$$

откуда следует, что

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

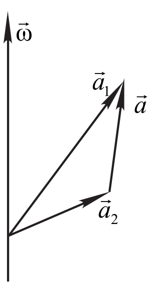



Рис. 4.10.

Если начало вектора $\vec{a}$ не лежит на оси вращения, то доказанная формула остается в силе, поскольку такой вектор можно представить в виде разности двух векторов с началами на оси вращения (рис. 4.10):

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}_1}{dt} - \frac{d\vec{a}_2}{dt} =$$
$$= [\vec{\omega} \times \vec{a}_1] - [\vec{\omega} \times \vec{a}_2] = [\vec{\omega} \times (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)] = [\vec{\omega} \times \vec{a}]\,.$$

**Пример 2.** Рассмотрим твердое тело (например, Земной шар), вращающееся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно неподвижной системы координат с базисом $\{\vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0}\}$ (рис. 4.11). Введем на этом твердом теле свой базис

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Он вращается вместе с твердым телом с угловой скоростью $\vec{\omega}$, поэтому

$$\vec{i} = \vec{i}(t), \quad \vec{j} = \vec{j}(t), \quad \vec{k} = \vec{k}(t),$$
$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{i}\right], \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{j}\right], \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{k}\right].$$

Рассмотрим точку $M$, движущуюся внутри тела или по его поверхности. Ее положение относительно неподвижной системы координат в каждый момент времени можно задать радиус-вектором $\vec{OM}$, который обозначим $\vec{r}(t)$. Выведем формулу скорости точки $M$ относительно неподвижной системы координат, т.е. формулу для $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. С этой целью разложим вектор $\vec{r}(t)$ по (вращающемуся) базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} =$$
$$= \left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right) + x \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{i}\right] + y \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{j}\right] + z \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{k}\right].$$

Выражение в скобках представляет собой скорость точки относительно связанного с телом базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Назовем ее *относительной скоростью* и обозначим $\vec{v}_{\text{отн.}}$. Таким образом,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн.}} + \left[\vec{\omega} \times \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\right] = \vec{v}_{\text{отн.}} + \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right].$$

В полученном равенстве векторное произведение $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$ представляет собой компоненту скорости, обусловленную вращением тела. Назовем ее *переносной скоростью* и обозначим $\vec{v}_{\text{пер.}}$.

Итак, абсолютная скорость точки $M$ (т.е. скорость относительно неподвижной системы координат) равна сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{пер.}} + \vec{v}_{\text{отн.}}.$$

Получим теперь формулу для ускорения точки $M$. Имеем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{пер.}}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\text{отн.}}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right) =$$

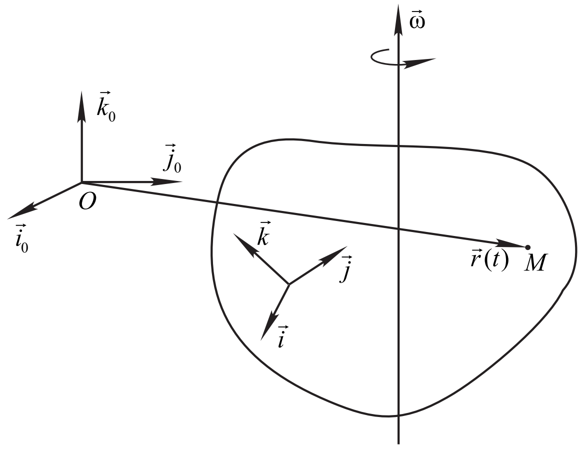



Рис. 4.11.

$$= [\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\text{пер.}} + \vec{v}_{\text{отн.}})] + \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{dx}{dt} \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{i}\right] + \frac{dy}{dt} \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{j}\right] + \frac{dz}{dt} \cdot \left[\vec{\omega} \times \vec{k}\right]\right) =$$

$$= [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}] + \vec{a}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}] =$$

$$= \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{отн.}} + 2\,[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}]\,.$$

В этом равенстве слагаемые

$$[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] =: \vec{a}_{\text{пер.}}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} =: \vec{a}_{\text{отн.}}$$

являются соответственно переносным и относительным ускорениями, а слагаемое $2\,[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}]$ — так называемым *кориолисовым* ускорением $\vec{a}_{\text{кор.}}$

Итак, абсолютное ускорение равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{отн.}} + \vec{a}_{\text{кор.}}$$

Отметим, что $\vec{a}_{\text{пер.}} = [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] = \left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right]$ представляет собой *двойное векторное произведение*.

Глава 5

# ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. Первообразная и неопределенный интеграл

К понятию первообразной приводит следующая физическая задача. Пусть $x$ — время, $y = f(x)$ — координата точки, движущейся по оси $y$, в момент времени $x$. Тогда $f'(x) = v(x)$ — скорость точки в момент времени $x$. Если известна зависимость координаты от времени, т.е. известна функция $f(x)$, то для нахождения скорости $v(x)$ нужно выполнить операцию дифференцирования.

Пусть теперь наоборот — известна зависимость скорости от времени, т.е. известна функция $v(x)$, а требуется найти зависимость координаты от времени, т.е. функцию $f(x)$, такую, производная $f'(x)$ которой равна заданной функции $v(x)$: $f'(x) = v(x)$. Тем самым возникает задача, *обратная дифференцированию.*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $X$.

**Определение.** Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке $X$, если $\forall x \in X : F'(x) = f(x)$.

В соответствии с этим определением функция $f(x)$, задающая координату точки на оси в момент времени $x$, является первообразной для функции $v(x)$, задающей скорость точки: $f'(x) = v(x)$.

**Примеры.**

1) $F(x) = \ln x$ — первообразная для $f(x) = 1/x$ на полупрямой $X_+ = (0; +\infty)$, т.к. $(\ln x)' = 1/x \ \forall x \in (0; +\infty)$.

$F(x) = \ln(-x)$ — первообразная для $f(x) = 1/x$ на полупрямой $X_- = (-\infty; 0)$, т.к.

$$\big(\ln(-x)\big)' = -1/(-x) = 1/x \ \forall x \in (-\infty; 0).$$

Отсюда следует, что $F(x) = \ln|x|$ — первообразная для $f(x) = 1/x$ на полупрямых $X_+$ и $X_-$.

2) Для функции

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

первообразной на $(-\infty;+\infty)$ является функция

$$F(x)=\begin{cases} x^2/2, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x^2/2, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

В самом деле,

$$\forall x>0:\ F'(x)=x=f(x);\ \forall x<0:\ F'(x)=-x=f(x).$$

Остается доказать (сделайте это самостоятельно), что

$$\exists F'(0)=0=f(0).$$

3) Рассмотрим функцию

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} +1, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Она имеет первообразную $F(x)=x$ на полупрямой $(0;+\infty)$, имеет первообразную $F(x)=-x$ на полупрямой $(-\infty;0)$, но не имеет первообразной на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$.

Отметим, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке $X$, то есть $\forall x\in X:\quad F'(x)=f(x)$, то $F(x)+C$, где $C$ — любое число, также первообразная для $f(x)$ на промежутке $X$, так как $\big(F(x)+C\big)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$. Справедливо и обратное.

**Теорема 1 (основная теорема интегрального исчисления).** Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке $X$, то $F_1(x)-F_2(x)=C=\text{const}$ на этом промежутке.

Доказательство.

Положим $F(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Нужно доказать, что $F(x)=$ $=\text{const}$ на промежутке $X$. Имеем

$$\forall x\in X:\ F'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Таким образом, нужно доказать, что если $F'(x)\equiv 0$ на промежутке $X$, то $F(x)=C=const$ на $X$. При всей очевидности этого утверждения мы пока *не можем* его доказать. Это утверждение будет доказано позже.

**Следствие.** Если $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке $X$, то любая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на этом промежутке имеет вид

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

где $C$ — некоторая постоянная.

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $X$ называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ на этом промежутке и обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

В этом обозначении функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*. Отметим, что $f(x)dx$ является дифференциалом любой первообразной $F(x)$ для $f(x)$:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \tag{5.1}$$

Операция вычисления неопределенного интеграла называется *интегрированием*. В силу следствия из теоремы 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{5.2}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, а $C$ — произвольная постоянная.

**Пример**. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Замечание по поводу обозначения: почему используется такое обозначение: $\int f(x)dx$, а не более краткое: $\int f(x)$? Во-первых, потому, что $dx$ указывает, по какой переменной ищется первообразная:

$$\int xydx = \frac{yx^2}{2} + C; \quad \int xydy = \frac{xy^2}{2} + C.$$

Во-вторых, дифференциал $dx$ играет роль в формуле замены переменной, о которой пойдет речь в разделе 3.

Отметим, что символом $\int f(x)dx$ мы будем обозначать как всю совокупность первообразных, так и некоторую из них.

Поставим вопрос: для каких функций $f(x)$ существует первообразная? Позднее мы покажем, что *первообразная существует для любой непрерывной на промежутке функции* $f(x)$. Разрывные функции также могут иметь первообразную.

**Пример**. Функция

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

является первообразной на $(-\infty;+\infty)$ для функции

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, \quad \text{если } x=0, \end{cases}$$

которая разрывна в точке $x=0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует. Равенство $F'(x)=f(x)$, если $x\neq 0$, проверяется непосредственно путем дифференцирования функции $x^2\sin\dfrac{1}{x}$; равенство $F'(0)=f(0)=0$ требует отдельного обоснования (получите это равенство, пользуясь определением производной).

Если первообразная для $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл

$$\int f(x)dx$$

*выражается через элементарные функции*. Оказывается, что интеграл от элементарной функции может не выражаться через элементарные функции, т.е. *класс элементарных функций не замкнут относительно операции интегрирования*.

**Примеры**: $\int e^{-x^2}dx$; $\int\sin(x^2)dx$ $\int\dfrac{\sin x}{x}dx$ — эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

Таблица основных интегралов.

1) $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$;
2) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$;
3) $\int\sin x dx=-\cos x+C$;
4) (допишите таблицу самостоятельно).

## § 2. Основные свойства неопределенных интегралов

1) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$;

2) $\int dF(x)=F(x)+C$;

3) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$;

4) $\forall k\in\mathbb{R} \quad (k\neq 0): \quad \int kf(x)dx=k\int f(x)dx$.

Свойства 1) и 2) следуют из равенств (5.1) и (5.2) (см. раздел 5.1).

Докажем справедливость равенства 3). Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ и

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1; \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.
Сложим (вычтем) два последних равенства:

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \big[F(x) \pm G(x)\big] + (C_1 \pm C_2). \tag{5.3}$$

С другой стороны, поскольку $\big[F(x) \pm G(x)\big]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$, то функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной для функции $f(x) \pm g(x)$, поэтому

$$\int \big[f(x) \pm g(x)\big]dx = \big[F(x) \pm G(x)\big] + C, \tag{5.4}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Сравнивая правые части равенств (5.3) и (5.4), приходим к равенству

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Справедливость равенства 4) докажите самостоятельно.

## § 3. Два метода интегрирования

### Замена переменной

**Теорема 2.** Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке $T$ и множеством ее значений является промежуток $X$. Пусть на $X$ определена функция $f(x)$, имеющая первообразную $F(x)$. Тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке $T$.

Доказательство. Используя равенство $F'(x) = f(x)$ и правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\big[F(\varphi(t))\big]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

что и доказывает утверждение теоремы 2.

**Следствие.** Поскольку

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \tag{5.5}$$

а

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)},$$

то формулу (5.5) можно записать в виде

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле*. Она показывает, что если в интеграле $\int f(x)dx$ делается замена переменной $x = \varphi(t)$, то нужно подставить вместо $x$ функцию $\varphi(t)$, а вместо $dx$ — дифференциал $d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$ ( тем самым проясняется предназначение множителя $dx$ в обозначении интеграла).

**Примеры**. 1) $\int \sin(\alpha x)dx$.
Сделаем замену переменной $x = t/\alpha$. Тогда $dx = dt/\alpha$ и по формуле замены переменной получаем:

$$\int \sin(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int \sin t dt = -\frac{1}{\alpha}\cos t + C = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + C.$$

2) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx \quad (a > 0)$.

Подынтегральная функция определена на промежутке $0 \leqslant x < a$. Сделаем замену переменной $x = a\sin^2 t$, где $0 \leqslant t < \pi/2$. Тогда

$$dx = 2a\sin t\cos t dt,\ \sin t = \sqrt{\frac{x}{a}},\ t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}},\ \cos t = \sqrt{1-\frac{x}{a}}.$$

Применяя формулу замены переменной, приходим к равенствам:

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx\Big|_{x=a^2\sin t} = \int \sqrt{\frac{a\sin^2 t}{a - a\sin^2 t}} \cdot 2a\sin t\cos t dt =$$

$$= 2a\int \frac{\sin t}{\cos t}\cdot \sin t\cos t dt = 2a\int \sin^2 t dt = a\int (1-\cos 2t)dt =$$

$$= a\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = a(t - \sin t\cos t) + C.$$

Возвращаясь от переменной $t$ снова к переменной $x$ (с помощью выражений для $t, \sin t$ и $\cos t$), получаем:

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx = a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - a\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}} + C =$$
$$= a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{x(a-x)} + C.$$

### Интегрирование по частям

**Теорема 3.** Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на промежутке $X$ и пусть функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную, то есть на промежутке $X$ существует интеграл

$$\int v(x)u'(x)dx.$$

Тогда интеграл

$$\int u(x)v'(x)dx$$

также существует на промежутке $X$ и выполняется равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям*.

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

откуда следует: $u(x)v'(x) = \big[u(x)v(x)\big]' - u'(x)v(x)$. Функция $\big[u(x)v(x)\big]'$ имеет первообразную $[u(x)v(x)]$, функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную по условию теоремы. Следовательно, функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и при этом

$$\int u(x)v'(x)dx = \int \Big[[u(x)v(x)]' - v(x)u'(x)\Big]dx =$$
$$= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Поскольку $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то формулу интегрирования по частям можно записать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Смысл интегрирования по частям состоит в том, что вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться проще исходного интеграла. Пример:

$$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

## § 4. Интегрирование рациональных функций

Рациональная функция (или рациональная дробь) $P_n(x)/Q_m(x)$ называется *правильной*, если $n < m$ (здесь $n$ и $m$ – степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$). Правильную рациональную дробь можно разложить на сумму так называемых *простейших дробей*. Рассмотрим пример:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в числителях левой и правой дробей, получаем систему уравнений относительно $A, B, C$ и $D$:

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-B+D=0, \\ A+B-C=1, \\ A-B-D=0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $A = B = 1/4$, $C = -1/2$, $D = 0$. Таким образом, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Обратимся теперь к общему случаю произвольной правильной рациональной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$. Пусть знаменатель $Q_m(x)$ имеет следующее разложение на множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\gamma \ldots (x^2+rx+s)^\delta,$$

где числа $a, \ldots, b$ — различные вещественные корни этого многочлена; $x^2 + px + q, \ldots, x^2 + rx + s$ — квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами, имеющие комплексные (различные) корни; $\alpha, \ldots, \delta$ — натуральные числа — кратности соответствующих корней, причем, как нетрудно видеть, $(\alpha + \ldots + \beta) + 2(\gamma + \ldots + \delta) = m$. Можно доказать, что всякий многочлен с вещественными коэффициентами имеет единственное разложение указанного вида; оно называется *разложением многочлена с вещественными коэффициентами на произведение неприводимых вещественных множителей.*

Правильную рациональную дробь $P_n(x)/Q_m(x)$, у которой знаменатель имеет приведенное выше представление, можно разложить, и притом единственным образом, на сумму простейших дробей следующего вида:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-a)} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \ldots +$$

$$+ \frac{L_\delta x + K_\delta}{(x^2+rx+s)^\delta} + \ldots + \frac{L_1 x + K_1}{x^2+rx+s}.$$

Коэффициенты $A_\alpha, \ldots, K_1$ можно определить таким же способом, как в рассмотренном примере. Этот способ нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Таким образом, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей четырех типов. Рассмотрим интегралы от этих простейших дробей.

1)
$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2)
$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^\alpha} = A(x-a)^{-\alpha+1}\frac{1}{-\alpha+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C \quad (\alpha \in \mathbb{N}, \alpha > 1).$$

3)
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,$$

причем $p^2 - 4q < 0$, и, следовательно, квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные корни.

Введем обозначение $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$ и сделаем замену переменной $t = x + \dfrac{p}{2}$. Тогда $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) = t^2 + a^2$, $x = t - p/2$, $dx = dt$. Следовательно,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M(t-p/2)+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{1+(t/a)^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

4)
$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha}dx,$$

причем $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные корни.

Снова введем обозначение $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$ и сделаем замену переменной $t = x + p/2$.
Тогда

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha}dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^\alpha}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\alpha} + (N-Mp/2)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\alpha} =$$

$$= \frac{M}{2(1-\alpha)(t^2+a^2)^{\alpha-1}} + (N-Mp/2)J_\alpha,$$

где $J_\alpha = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\alpha}$ $(\alpha > 1)$. Для вычисления интеграла $J_\alpha$ воспользуемся методом интегрирования по частям, считая $\alpha \geqslant 1$:

$$J_\alpha = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\alpha} = \frac{t}{(t^2+a^2)^\alpha} - \int t d\left(\frac{1}{(t^2+a^2)^\alpha}\right) = \frac{t}{(t^2+a^2)^\alpha} -$$

$$-\int t(-\alpha)(t^2+a^2)^{-\alpha-1}\cdot 2tdt = \frac{t}{(t^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{\alpha+1}}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\alpha} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\alpha+1}}\right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha J_\alpha - 2\alpha a^2 J_{\alpha+1}.$$

Отсюда получаем *рекуррентную формулу* для вычисления $J_\alpha$:

$$J_{\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha a^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^\alpha} + (2\alpha-1)J_\alpha\right].$$

Поскольку

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{1+(t/a)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

то, полагая в рекуррентной формуле $\alpha = 1$, находим $J_2$:

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right] + C;$$

полагая в рекуррентной формуле $\alpha = 2$ и зная $J_2$, найдем $J_3$, и т.д.

Таким образом, каждая из простейших дробей интегрируется в элементарных функциях.

Если рациональная дробь $P_n(x)/Q_m(x)$ неправильная, т.е. $n \geqslant m$, то, разделив $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, получим

$$P_n(x) = Q_m(x)\cdot T_{n-m}(x) + R_k(x),$$

где $T_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$ — многочлены степени $n-m$ и $k$, причем $k < m$. Отсюда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

где второе слагаемое в правой части равенства представляет собой правильную рациональную дробь. Тем самым, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

**Общий вывод:** *любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.*

Замечание. Пусть $Q_m(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$, где $\varphi(a) \neq 0$, т.е. $x = a$ —вещественный корень кратности $\alpha$. Тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots .$$

Умножив последнее равенство на $(x-a)^\alpha$ и положив затем $x = a$, получим:

$$A_\alpha = \frac{P_n(a)}{\varphi(a)} = \frac{P_n(x)}{\varphi(x)}\bigg|_{x=a}.$$

Таким образом, чтобы найти коэффициент $A_\alpha$, нужно в дроби $\dfrac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}$ вычеркнуть в знаменателе множитель $(x-a)^\alpha$, а затем в оставшемся выражении положить $x = a$. Такой способ нахождения коэффициента $A_\alpha$ называется *методом вычеркивания*.

**Примеры.**

1) Вычислим интеграл от правильной рациональной дроби, рассмотренной в начале этого раздела:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C.$$

2)

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Используя метод вычеркивания, находим $A$ и $B$: $A = \dfrac{1}{2a}$, $B = -\dfrac{1}{2a}$. Итак,

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\Big(\ln|x-a| - \ln|x+a|\Big) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Это интеграл носит название «высокий логарифм».

3)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

<u>Первый способ.</u> Воспользуемся *подстановкой Эйлера*
$$t = x + \sqrt{x^2+1}\,.$$

Тогда $t - x = \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow t^2 - 2xt + x^2 = x^2 + 1$, откуда
$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2}dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt,$$
$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

Следовательно,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{t^2+1}{2t^2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$
$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

<u>Второй способ.</u> Сделаем замену переменной $x = \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. Тогда
$$dx = \operatorname{ch} t dt, \quad t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Учитывая равенство $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$, получаем:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch} t} = t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Аналогично выводится равенство
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

Итак,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2\pm 1}\right| + C.$$

Этот интеграл называется «длинный логарифм».

4)
$$\int \frac{dx}{5\cos x + 4}.$$

Положим $t = \operatorname{tg}(x/2)$, тогда

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$5\cos x + 4 = \frac{5-5t^2}{1+t^2} + 4 = \frac{9-t^2}{1+t^2}.$$

Используя выписанные равенства, а также формулу «высокого логарифма», получаем:

$$\int \frac{dx}{5\cos x + 4} = 2\int \frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{9-t^2} = -2\int\frac{dt}{t^2-9} =$$

$$= -\frac{2}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right| + C.$$

## § 5. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$, где $a < b$. Выберем на сегменте $[a,b]$ произвольным образом точки $x_1,\ x_2, ...,\ x_{n-1}$, так, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

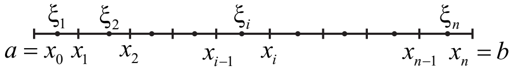



Рис. 5.1.

Определенный выбор точек $x_1,\ x_2, ...,\ x_{n-1}$ назовем *разбиением* сегмента $[a,b]$, сами точки $x_1,\ x_2, ...,\ x_{n-1}$ назовем *точками разбиения*, а сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ — *частичными сегментами*. На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем какую-нибудь точку $\xi_i$ (рис. 5.1). Точки $\xi_i$ называются *промежуточными точками*.

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (заметим, что $\Delta x_i > 0$) и составим сумму

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

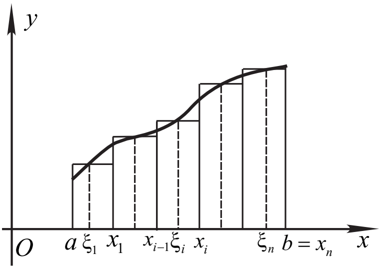



Рис. 5.2.

Число $I(x_i, \xi_i)$ называется *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек $\xi_i$ на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Геометрический смысл интегральной суммы для $f(x) \geqslant 0$ — площадь ступенчатой фигуры (рис. 5.2).

Пусть $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$. Величину $\Delta$ называют *диаметром разбиения*.

**Определение.** Число $I$ называется пределом интегральных сумм $I(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения $[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, и любого выбора точек $\xi_i$ выполняется неравенство

$$|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = I$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на $[a, b]$, а число $I$ называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$ и обозначается так:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла для непрерывной функции $f(x) \geqslant 0$: интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции (рис. 5.3) (это будет доказано в главе 11). **Физические примеры:**

1) $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ — путь, пройденный точкой по прямой за промежуток времени $[t_1, t_2]$ при скорости $v(t)$.

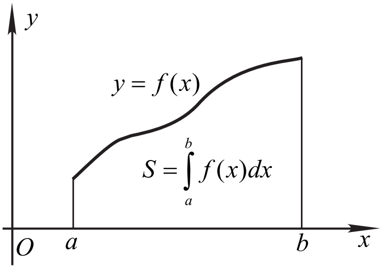



Рис. 5.3.

2) $A=\int\limits_a^b f(x)dx$ — работа силы $f(x)$ при перемещении материальной точки по оси $x$ из точки $a$ в точку $b$ (направление силы совпадает с направлением оси $x$, если $f(x)>0$, и противоположно направлению оси $x$, если $f(x)<0$).

Поставим вопрос: для каких функций $f(x)$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть какие функции интегрируемы?

Неограниченная на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ неинтегрируема, так как для любого разбиения $[a,b]$ интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора точек $\xi_i$, и, следовательно, не существует предела интегральных сумм при $\Delta\to 0$.

Рассмотрим два примера ограниченных функций.

1) $f(x)=c=const,\quad x\in[a,b]$.

Для любого разбиения $[a,b]$ и любого выбора точек $\xi_i$:

$$I(x_i,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)=c(b-a),$$

то есть

$$\int\limits_a^b c\,dx=c(b-a)$$

Итак, постоянная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

2) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ – рациональное число},\\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число},\end{cases}$ где $x\in[a,b]$ —

(функция Дирихле).

Для любого разбиения сегмента $[a,b]$ интегральная сумма

$I(x_i,\xi_i)$ может принимать значения от 0 до $(b-a)$ в зависимости от выбора точек $\xi_i$. Следовательно, не существует $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)$, то есть функция Дирихле не интегрируема по Риману.

В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные функции.

Наша цель — доказать интегрируемость непрерывных функций, некоторых разрывных функций, в частности, кусочно-непрерывных функций, и монотонных функций. Для этого потребуется развить теорию верхних и нижних сумм Дарбу.

## § 6. Суммы Дарбу

Пусть $f(x)$ — ограниченная на $[a,b]$ функция. Рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1},x_i]$, $\ i=1,2,...,n$. Введем обозначения:

$$M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

и составим две суммы:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i;\quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Числа $S$ и $s$ называются *верхней и нижней суммами* функции $f(x)$ для данного разбиения сегмента $[a,b]$ или, коротко, *верхней и нижней суммами Дарбу*.

**Свойства сумм Дарбу**.

I. Так как $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ выполняются неравенства $m_i\leqslant f(\xi_i)\leqslant M_i$, то

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

то есть для данного разбиения

$$s\leqslant I(x_i,\xi_i)\leqslant S. \tag{5.6}$$

Итак, *любая интегральная сумма данного разбиения заключена между нижней и верхней суммами этого разбиения*. Иначе говоря, нижняя и верхняя суммы данного разбиения являются нижней и верхней гранями множества интегральных сумм этого разбиения. Более того,

$$s = \inf\{I(x_i, \xi_i)\}, \quad S = \sup\{I(x_i, \xi_i)\}. \tag{5.7}$$

Это следует из того, что точку $\xi_i$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что значение $f(\xi_i)$ будет сколь угодно мало отличаться от $m_i$ (и также от $M_i$).

II. Чтобы отличать одно разбиение сегмента $[a, b]$ от другого, будем обозначать разбиения буквой $T$ с различными индексами.

Пусть разбиение $T_2$ сегмента $[a, b]$ получено путем добавления нескольких новых точек к разбиению $T_1$. Нижнюю и верхнюю суммы разбиений $T_1$ и $T_2$ обозначим $s_1, S_1$ и $s_2, S_2$ соответственно. Тогда

$$s_2 \geqslant s_1, \quad S_2 \leqslant S_1.$$

Другими словами, *при измельчении разбиения нижняя сумма не убывает, а верхняя – не возрастает.*

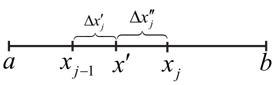



Рис. 5.4.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда к разбиению $T_1$ добавлена только одна новая точка разбиения: $x' \in [x_{j-1}, x_j]$ (рис. 5.4). Докажем, что будет выполнено неравенство $S_2 \leqslant S_1$ (неравенство $s_2 \geqslant s_1$ доказывается аналогично). Введем обозначения

$$\Delta x'_j = x' - x_{j-1}, \ \Delta x''_j = x_j - x', \ M'_j = \sup_{[x_{j-1}, x']} f(x), \ M''_j = \sup_{[x', x_j]} f(x).$$

Тогда

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = \Delta x'_j + \Delta x''_j, \quad M'_j \leqslant M_j, \quad M''_j \leqslant M_j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= M_j \Delta x_j - \left(M'_j \Delta x'_j + M''_j \Delta x''_j\right) = \\ &= M_j \left(\Delta x'_j + \Delta x''_j\right) - M'_j \Delta x'_j - M''_j \Delta x''_j = \\ &= \left(M_j - M'_j\right) \Delta x'_j + \left(M_j - M''_j\right) \Delta x''_j \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

то есть $S_2 \leqslant S_1$. Отсюда следует, что если добавлено несколько новых точек разбиения, то неравенство $S_2 \leqslant S_1$ также выполняется.

Пусть для разбиения $T_1$ $\Delta = \max \Delta x_i$, пусть

$$\sup_{[a,b]} f(x) = M, \quad \inf_{[a,b]} f(x) = m,$$

и пусть разбиение $T_2$ получено путем добавления одной новой точки к разбиению $T_1$. Тогда из (5.8) следует неравенство $S_1 - S_2 \leqslant (M - m) \cdot \Delta$. Если разбиение $T_2$ получено путем добавления $p$ новых точек к разбиению $T_1$, то

$$S_1 - S_2 \leqslant p\,(M - m)\,\Delta, \quad s_2 - s_1 \leqslant p\,(M - m)\,\Delta. \tag{5.9}$$

III. *Нижняя сумма произвольного разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.*
Доказательство. Пусть суммы Дарбу произвольных разбиений $T_1$ и $T_2$ равны $s_1$, $S_1$ и $s_2$, $S_2$. Требуется доказать, что $s_1 \leqslant S_2$ и $s_2 \leqslant S_1$.

Обозначим буквой $T$ объединение разбиений $T_1$ и $T_2$. Пусть суммы Дарбу разбиения $T$ равны $s$ и $S$. Тогда, используя свойство II и неравенства (5.6), приходим к неравенствам

$$s_1 \leqslant s \leqslant S \leqslant S_1,$$

$$s_2 \leqslant s \leqslant S \leqslant S_2,$$

из которых следует, что $s_1 \leqslant S_2$, $s_2 \leqslant S_1$.
IV. Рассмотрим множество $\{s\}$ всевозможных нижних сумм и множество $\{S\}$ всевозможных верхних сумм (для данной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$). Множество $\{S\}$ ограничено снизу (любой нижней суммой) и, следовательно, имеет точную нижнюю грань. Множество $\{s\}$ ограничено сверху (любой верхней суммой) и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Введем обозначения

$$\overline{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\}.$$

Числа $\overline{I}$ и $\underline{I}$ называются *верхним и нижним интегралами Дарбу* (от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$).
Утверждение. $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.
Доказательство. Предположим, что $\underline{I} > \overline{I}$ и положим $K = \frac{1}{2}\left(\overline{I} + \underline{I}\right)$. Согласно определению точных граней числового множества найдутся такие верхняя сумма $S'$ и нижняя сумма $s''$, которые удовлетворяют неравенствам $S' < K$ и $s'' > K$ (рис. 5.5).

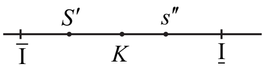



Рис. 5.5.

Отсюда следует, что $S' < s''$, что противоречит свойству III. Поэтому наше предположение неверно, и следовательно, $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Итак, для нижней $s$ и верхней $S$ сумм любого разбиения справедливы неравенства

$$s \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S. \tag{5.10}$$

V. **Лемма Дарбу**.

$$\lim_{\Delta\to 0} S = \overline{I}; \quad \lim_{\Delta\to 0} s = \underline{I},$$

то есть $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняются неравенства

$$S - \overline{I} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \underline{I} - s < \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем доказательство для верхних сумм. Пусть

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Если $M = m$, то $f(x) = const = M = m$, и для любого разбиения сегмента $[a, b]$ имеем: $S = m(b - a)$, $\overline{I} = m(b - a)$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta\to 0} S = \overline{I}$.

Пусть $M > m$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\overline{I} = \inf\limits_{[a,b]} S$, то существует разбиение $T_1$ сегмента $[a, b]$, такое, что его верхняя сумма $S_1$ удовлетворяет неравенству $S_1 < \overline{I} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть разбиение $T_1$ содержит $p$ точек разбиения. Возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2p(M - m)}$$

и докажем, что верхняя сумма $S$ любого разбиения $T$, у которого $\Delta < \delta$, удовлетворяет неравенству $S - \overline{I} < \varepsilon$. Это и будет означать, что

$$\lim_{\Delta\to 0} S = \overline{I}.$$

Рассмотрим произвольное разбиение $T$, у которого $\Delta < \delta$. Объединим его с разбиением $T_1$. Получим разбиение $T_2 = T \cup T_1$. Его верхнюю сумму обозначим $S_2$. Согласно первому неравенству в (5.9) $S - S_2 \leqslant p(M - m)\Delta$, а поскольку

$$\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2p(M - m)},$$

то
$$S - S_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.11}$$
С другой стороны, согласно свойству II, $S_2 \leqslant S_1$, а поскольку $S_1 < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$, то $S_2 < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$, или
$$S_2 - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.12}$$
Складывая неравенства (5.11) и (5.12), приходим к неравенству $S - \overline{I} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

## § 7. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции

**Теорема 4**. Для того, чтобы ограниченная на сегменте функция была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \overline{I}$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то есть существует $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = I$. Тогда, согласно определению предела интегральных сумм, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек $\xi_i$ выполняется неравенство $|I(x_i, \xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$. Зафиксируем какое-нибудь одно из таких разбиений. Пусть его суммы Дарбу равны $s$ и $S$.

В силу свойства I (см. равенства (5.7)) можно так выбрать точки $\xi_i$ (обозначим их $\xi_i'$), что будет выполнено неравенство $I(x_i, \xi_i') - s < \frac{\varepsilon}{4}$, и можно выбрать их так, что (обозначим этот выбор через $\xi_i''$), что $S - I(x_i, \xi_i'') < \frac{\varepsilon}{4}$.

Используя эти неравенства, получаем, что для зафиксированного нами разбиения справедливы соотношения
$$S - s = [S - I\,(x_i, \xi_i'')] + [I(x_i, \xi_i'') - I] + [I - I(x_i, \xi_i')] + \\ + [I(x_i, \xi_i') - s] < \varepsilon,$$
поскольку каждое из выражений в квадратных скобках меньше $\frac{\varepsilon}{4}$.

Воспользуемся теперь неравенствами (5.10):
$$s \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S.$$

Из этих неравенств и неравенства $S - s < \varepsilon$ следует, что

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ — произвольное положительное число, то $\overline{I} - \underline{I} = 0$, то есть $\underline{I} = \overline{I}$.

Необходимость условия $\underline{I} = \overline{I}$ для интегрируемости $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ доказана.

Замечание. Попутно мы установили, что если $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon$.

б) Достаточность. Пусть $\underline{I} = \overline{I} = I$. По лемме Дарбу $\lim\limits_{\Delta \to 0} s = I$ и $\lim\limits_{\Delta \to 0} S = I$, а так как для любого разбиения $s \leqslant I(x_i, \xi_i) \leqslant S$ (неравенства (5.6)), то $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = I$. Это и означает, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Теорема 4 доказана.

**Пример.** Снова рассмотрим функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

Для любого разбиения сегмента $[a, b]$ имеем: $s = 0, \quad S = b - a$. Поэтому

$$\underline{I} = \sup\{s\} = 0, \quad \overline{I} = \inf\{S\} = b - a.$$

Таким образом, $\underline{I} \neq \overline{I}$, поэтому, согласно теореме 4, функция Дирихле не интегрируема ни на одном сегменте.

**Теорема 5**. Для того, чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало такое разбиение сегмента $[a, b]$ (хотя бы одно), для которого $S - s < \varepsilon$.

Доказательство. а) Необходимость. См. замечание после доказательства необходимости в теореме 4.

б) Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon$. Снова воспользуемся неравенствами (5.10):

$$s \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S,$$

из которых следует, что $0 \leqslant \underline{I} - \overline{I} < \varepsilon$, откуда в силу произвольности $\varepsilon$ получаем $\underline{I} = \overline{I}$. По теореме 4 функция интегрируема на сегменте $[a, b]$, что и требовалось доказать. Теорема 5 доказана.

Замечание. Используя обозначения

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

введем величину $w_i = M_i - m_i$ и назовем ее *колебанием функции* $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда разность $S - s$ можно записать в виде

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i.$$

## § 8. Классы интегрируемых функций

1. **Интегрируемость непрерывных функций**. Предварительно введем понятие равномерной непрерывности функции.

**Определение**. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на промежутке $X$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x' \in X$ и $\forall x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

В этом определении существенно то, что $\delta$ — одно и то же число для всех точек из промежутка $X$.

Из определения следует, что равномерно непрерывная на промежутке функция является непрерывной в каждой точке этого промежутка. Обратное неверно.

**Пример.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in X = (0; 1]$.

Функция $\dfrac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке промежутка $X$. Докажем, что она не является равномерно непрерывной на этом промежутке, то есть $\exists \varepsilon > 0$, такое что $\forall \delta > 0 \;\; \exists x'$ и $x'' \in X$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, а

$$|f(x'') - f(x')| = \left| \frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \right| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и положим $x' = \dfrac{1}{n}, \quad x'' = \dfrac{1}{n+2}, \; n \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall \delta > 0 \;\; \exists n$, такое, что $|x'' - x'| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2} < \delta$. Но при этом

$$\left| \frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \right| = |n + 2 - n| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Таким образом, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0; 1]$.

Особое место среди промежутков занимает сегмент. Оказывается, что непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте. Это утверждение называется **теоремой Кантора** и будет доказано в главе 7. Там же будут доказаны еще две теоремы о непрерывных на сегменте функциях.

**1-ая теорема Вейерштрасса**. Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.

**2-ая теорема Вейерштрасса.** Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.

Это означает, что если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то найдутся $x'$ и $x'' \in [a, b]$, такие, что

$$f(x') = M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad f(x'') = m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

**Следствие из теоремы Кантора**. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение сегмента $[a, b]$, у которого каждое $w_i < \varepsilon$ ($w_i$ — колебание функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$).

Доказательство. По теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x', \quad x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Возьмем какое-нибудь разбиение сегмента $[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, и рассмотрим произвольный частичный сегмент $[x_{i-1}, x_i]$. Для этого частичного сегмента $x_i - x_{i-1} < \delta, \quad w_i = M_i - m_i$, где $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Докажем, что $w_i = M_i - m_i < \varepsilon$.

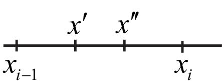



Рис. 5.6.

Согласно второй теореме Вейерштрасса $\exists x', \quad x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ (рис. 5.6), такие, что $f(x') = M_i$ и $f(x'') = m_i$. Так как

$$|x'' = x'| \leqslant x_i - x_{i-1} < \delta,$$

то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, то есть $M_i - m_i < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

**Теорема 6**. Непрерывная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу следствия из теоремы

Кантора существует такое разбиение сегмента $[a, b]$, у которого каждое $w_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Для этого разбиения

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Отсюда по теореме 5 следует, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Теорема 6 доказана.

2. **Интегрируемость некоторых разрывных функций**.

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте точки разрыва (конечное число или даже бесконечно много точек разрыва).

Будем говорить, *что все точки разрыва функции можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, заключающих в себе все точки разрыва и имеющих сумму длин, меньшую $\varepsilon$.

**Примеры.**

**1.** Пусть функция $f(x)$ имеет n точек разрыва на сегменте $[a, b]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и заключим каждую точку разрыва в интервал длины, меньшей $\dfrac{\varepsilon}{n}$. Тогда все точки разрыва будут заключены в конечное число интервалов с суммой длин, меньшей $\varepsilon$.

Таким образом, все точки разрыва функции можно покрыть в данном случае конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

**2.** Функция Дирихле, заданная на сегменте $[a, b]$. Эта функция разрывна во всех точках сегмента $[a, b]$, и, следовательно, все ее точки разрыва нельзя покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

**Теорема 7**. Если функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$ и если все ее точки разрыва можно покрыть конечным числом интервалов со сколь угодно малой суммой длин, то функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Пусть

$$\sup_{[a,b]} f(x) = M, \quad \inf_{[a,b]} f(x) = m, \quad M > m.$$

Отметим, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$ каждое $w_i \leqslant M - m$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и покроем все точки разрыва функции конечным числом интервалов с суммой длин, меньшей $\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Остальная часть сегмента $[a,b]$ представляет собой конечное число непересекающихся сегментов, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна. В силу следствия из теоремы Кантора каждый из этих сегментов можно разбить на частичные сегменты так, что на каждом из частичных сегментов будет выполнено неравенство $w_i < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Объединяя эти разбиения и интервалы, покрывающие точки разрыва функции, получим разбиение сегмента $[a,b]$, для которого

$$S - s = \sum_i w_i \Delta x_i = \sum_i{}' w_i \Delta x_i + \sum_i{}'' w_i \Delta x_i, \tag{5.13}$$

где $\sum'$ — сумма по интервалам, покрывающим точки разрыва функции, $\sum''$ — сумма по сегментам, на которых функция $f(x)$ непрерывна. Из (5.13) следует, что

$$S - s < (M-m)\sum_i{}' \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i{}'' \Delta x_i <$$

$$< (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы построили такое разбиение сегмента $[a,b]$, для которого $S - s < \varepsilon$. Отсюда по теореме 5 следует, что $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$. Теорема 7 доказана.

**Следствие**. Если функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a,b]$ и имеет на этом сегменте конечное число точек разрыва, то она интегрируема на сегменте $[a,b]$.

В частности, кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, то есть имеющая на этом сегменте конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема на сегменте $[a,b]$.

3. **Интегрируемость монотонных функций**.

**Теорема 8**. Монотонная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ не убывает на сегменте $[a,b]$ и не является постоянной. Тогда $f(b) > f(a)$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем сегмент $[a,b]$ на равные частичные сегменты, у которых длина меньше $\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Для

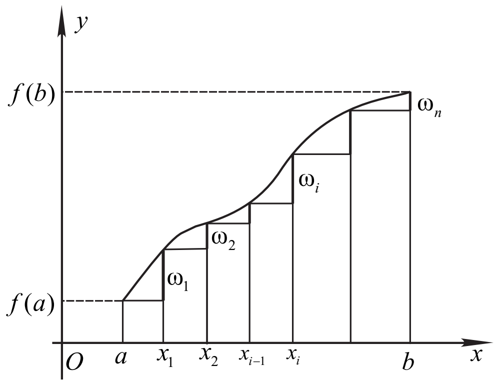



Рис. 5.7.

этого разбиения

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Но для неубывающей функции $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = f(b) - f(a)$ (см. рис. 5.7). Поэтому $S - s < \varepsilon$, а отсюда по теореме 5 следует, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Теорема 8 доказана.

## § 9. Свойства определенного интеграла

1. Мы ввели определенный интеграл по сегменту $[a, b]$ при условии $a < b$.
Положим по определению:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \quad \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Следующие свойства будем рассматривать при условии $a < b$.
2. Линейное свойство.
Если $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции на сегменте $[a, b]$, а $\alpha$ и $\beta$ — любые вещественные числа, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на сегменте $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x)dx + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{5.14}$$

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$ и запишем ее в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))\, \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получаем формулу (5.14).

Отметим два частных случая формулы (5.14).

Если $\alpha = 1$, $\beta = 1$ или $\beta = -1$, то

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций);

если $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, то из (5.14) получаем:

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

(постоянный множитель можно выносить за знак интеграла).

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ , то она интегрируема на любом сегменте $[c, d] \subset [a, b]$. Докажите это утверждение самостоятельно, опираясь на теорему 5.

4. Аддитивность интеграла.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и точка $c \in (a, b)$. Тогда

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (5.15)$$

Свойство интеграла, выраженное формулой (5.15), и называется аддитивностью интеграла.

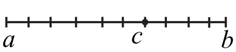


Рис. 5.8.

Доказательство. Рассмотрим такие разбиения сегмента $[a, b]$, для которых точка $c$ является точкой разбиения (см. рис. 5.8). Для таких разбиений

$$\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получаем равенство (5.15).

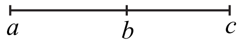



Рис. 5.9.

Отметим, что равенство (5.15) справедливо и в том случае, когда точка $c$ лежит вне сегмента $[a, b]$. Пусть, например, $a < b < c$ (рис. 5.9), и функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, c]$. Тогда, согласно доказанному, справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

а так как

$$-\int_b^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx,$$

(свойство 1), то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

то есть формула (5.15) верна и в этом случае.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то $I = \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Доказательство. Так как $f(x) \geqslant 0$, то любая интегральная сумма неотрицательна:

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0. \tag{5.16}$$

По определению $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i, \xi_i) = I$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$, или

$$I - \varepsilon < I(x_i, \xi_i) < I + \varepsilon. \tag{5.17}$$

Предположим, что $I < 0$, и возьмем $\varepsilon = -I$. Тогда правое неравенство в (5.17) примет вид $I(x_i, \xi_i) < 0$, что противоречит неравенству (5.16). Полученное противоречие доказывает, что $I \geqslant 0$.

**Следствие**. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$.

В самом деле, так как $f(x) - g(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx \geqslant 0$, откуда следует искомое неравенство $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом сегменте, и справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Докажите это самостоятельно, опираясь на теорему 5.

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть из интегрируемости функции $|f(x)|$ на сегменте $[a, b]$ не следует интегрируемость $f(x)$ на этом сегменте.

**Пример.**

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ -1, \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases} \quad x \in [a, b].$$

Так как $|f(x)| = 1$, то $|f(x)|$ — интегрируемая функция, но при этом $f(x)$ — неинтегрируемая функция (это доказывается так же, как для функции Дирихле).

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то:

а) функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на сегменте $[a, b]$;

б) если, кроме того, $\inf\limits_{[a,b]} g(x) > 0$ (либо $\sup\limits_{[a,b]} g(x) < 0$), то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Докажите это самостоятельно, опираясь на теорему 5.

## § 10. Формулы среднего значения

**Теорема 9**. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$, $g(x) \geqslant 0$ (либо $\leqslant 0$) $\forall x \in [a,b]$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда существует число $\mu \in [m, M]$, для которого справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{5.18}$$

Доказательство. Пусть (для определенности) $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Так как $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_a^b mg(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b Mg(x)dx$$

или

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{5.19}$$

Так как $g(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_a^b g(x)dx \geqslant 0$ (свойство 5). Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то из (5.19) получаем, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, и, следовательно, равенство (5.18) справедливо для любого $\mu$. Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то, разделив на $\int\limits_a^b g(x)dx$, получим неравенства

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Дробь, стоящая в средней части неравенства, является некоторым числом из сегмента $[m, M]$. Обозначив это число буквой $\mu$, приходим к равенству (5.18). Теорема 9 доказана.

**Следствия**.

1. Если выполнены условия теоремы 9, и, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$, такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{5.20}$$

<u>Доказательство.</u> В силу непрерывности функция $f(x)$ принимает все значения из сегмента $[m, M]$, в частности, для числа $\mu$ из формулы (5.18) найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, для которой $f(\xi) = \mu$. Подставляя в формулу (5.18) $f(\xi)$ вместо $\mu$, приходим к равенству (5.20).

2. Если $g(x) = 1$ на $[a, b]$, то формулы 5.18) и (5.20) дают равенства

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu\int\limits_a^b dx = \mu(b-a), \tag{5.21}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{5.22}$$

Формулы (5.18), (5.20)-(5.22) называются <u>формулами среднего значения</u>.

**Задача.** Пусть $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos x, \quad a = 0, \quad b = \pi$.

1. Докажите, что в этом случае равенство (5.18)) не выполняется ни для какого числа $\mu$.
2. Какое условие теоремы 9 не выполнено в этом случае?

## § 11. Формула Ньютона–Лейбница

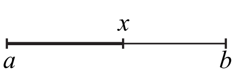



Рис. 5.10.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда она интегрируема на этом сегменте, а также на любом сегменте, содержащемся в сегменте $[a, b]$. Отметим на сегменте $[a, b]$ произвольную точку $x$ (рис. 5.10). Числовую переменную, изменяющуюся от $a$ до $x$, обозначим буквой $t$, и рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$. Он называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Обозначим его $F(x)$:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

**Теорема 10.** Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную на этом сегменте. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Доказательство. Согласно определению первообразной нужно доказать, что $\forall x \in [a, b]$ существует $F'(x)$, равная $f(x)$, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Используя выражение для $F(x)$ и свойства определенного интеграла, получаем:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt =$$

$$= \int\limits_x^a f(t)dt + \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi) \cdot \Delta x,$$

где $\xi \in [x, x + \Delta x]$.

Последнее равенство получено с помощью формулы среднего значения. Следовательно,

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

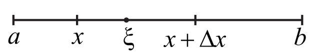



Рис. 5.11.

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$. Поскольку $\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$ (см. рис. 5.11), а функция $f(x)$ непрерывна в любой точке сегмента $[a, b]$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$. Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

что и требовалось доказать. Теорема 10 доказана.

Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются на постоянную, поэтому в силу теоремы 10 любая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

где $C$ — некоторое число.

Положив в этом равенстве $x = a$, получим $\Phi(a) = C$. Положив теперь $x = b$, приходим к равенству $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + \Phi(a)$, откуда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{5.23}$$

Таким образом, *интеграл от непрерывной функции* $f(x)$ *по сегменту* $[a, b]$ *равен разности значений любой первообразной функции* $f(x)$*, взятых в точках* $b$ *и* $a$*.*

Формула (5.23) называется *формулой Ньютона-Лейбница* и считается основной формулой интегрального исчисления. Она связывает определенный интеграл с неопределенным. Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ часто записывают в виде $\Phi(x)\big|_a^b$.

**Примеры.** 1).

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

2)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_{-1}^{+1} = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

**Задача.** Найдите первообразную функции $e^{|x|}$ на сегменте $[-1, 1]$ с помощью интеграла с переменным верхним пределом.

Замечание. Рассмотрим интеграл, у которого нижний и верхний пределы являются функциями аргумента $x$,

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt.$$

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, $F(t)$ — ее первообразная, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции.

По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = F\left(\psi(x)\right) - F\left(\varphi(x)\right).$$

Отсюда получаем, учитывая, что $F'(t) = f(t)$,

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = F'(\psi(x))\cdot\psi'(x) - F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x),$$

то есть

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

## § 12. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

**Теорема 11.** Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$; 2) функция $g(t)$ определена и имеет непрерывную производную на сегменте $[\alpha,\beta]$, причем $a \leqslant g(t) \leqslant b$ при $t \in [\alpha,\beta]$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

(оно называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*).

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$, то есть $F'(x) = f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{5.24}$$

Функция $F(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, так как

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Применяя снова формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))\Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a). \tag{5.25}$$

Сравнивая (5.24) и (5.25), приходим к искомому равенству.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Теорема 11 доказана.

Пример. Вычислить $I = \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Сделаем замену переменной $x = \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Тогда

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t, \quad dx = -\sin t dt,$$

$$I = \int\limits_\pi^0 \left(-\sin^2 t\right) dt = \int\limits_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Геометрический смысл этого интеграла: функция $y = \sqrt{1-x^2}$ задает на сегменте $[-1, 1]$ полуокружность (см. рис. 5.12) с радиусом $R = 1$. Поэтому $I = \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ есть площадь полукруга: $I = \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

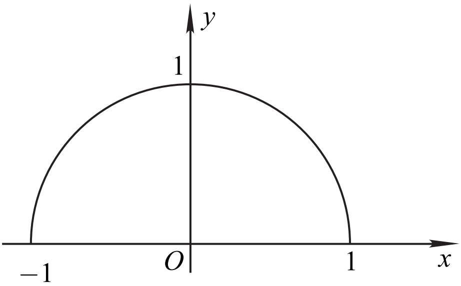



Рис. 5.12.

**Теорема 12**. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на сегменте $[a, b]$ непрерывные производные. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{5.26}$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Доказательство. Так как функция $u(x)v(x)$ является первообразной для непрерывной функции $[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$, то, согласно формуле Ньютона–Лейбница, справедливо равенство

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

откуда следует искомое равенство (5.26). Теорема доказана.

Замечание. Так как $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то равенство (5.26) можно записать в виде

$$\int\limits_a^b u(x)dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du.$$

Пример. $\int\limits_0^\pi x\sin x dx = \int\limits_0^\pi x d(-\cos x) = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x dx = \pi - 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$

## § 13. Геометрические приложения определенного интеграла

1. **Длина кривой.** Рассмотрим кривую на плоскости, координаты точек которой в прямоугольной системе координат $Oxy$ заданы уравнениями (см. рис. 5.13):

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{5.27}$$

Переменная $t$ называется *параметром*, а уравнения (5.27) — *параметрическими уравнениями кривой*. Если различным зна-

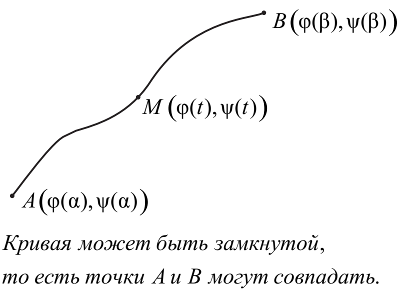



Рис. 5.13.

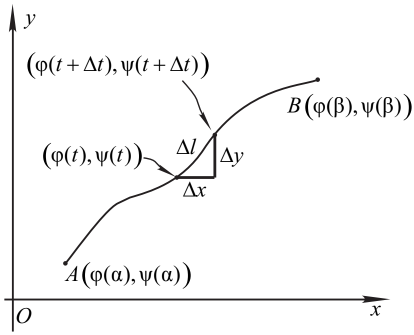



Рис. 5.14.

чениям $t \in [\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки $(\varphi(t), \psi(t))$, то есть нет кратных точек, то кривая называется *простой незамкнутой кривой*. Если точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется *простой замкнутой кривой*.

Для простой (незамкнутой или замкнутой) кривой, заданной уравнениями (5.27), рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Ему соответствует разбиение кривой точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$, где $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Впишем в кривую ломаную $A, M_1, M_2, \ldots, B$. Обозначим длину ломаной через $l(M_i)$ и положим $\Delta t = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i - t_{i-1})$.

**Определение**. Число $l$ называется пределом длин ломаных $l(M_i)$ при $\Delta t \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство

$$l - l(M_i) < \varepsilon$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta t \to 0} l(M_i) = l$, то кривая называется *спрямляемой*, а число $l$ — *длиной кривой* (или *длиной дуги кривой*).

Если простая кривая задана уравнениями (5.27), причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, то кривая спрямляема, а ее длина выражается формулой

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{5.28}$$

Обоснование этой формулы будет проведено в главе 12. Для того, чтобы наглядно представить себе, как получается формула (5.28), рассмотрим рис. 5.14. На этом рисунке

$$\Delta l \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,,$$

$$\Delta x \approx dx = \varphi'(t)\Delta t, \quad \Delta y \approx dy = \psi'(t)\Delta t.$$

Отсюда получаем

$$\Delta l = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \Delta t \Longrightarrow l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Если кривая задана уравнением $y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$, то, полагая $x = t, \quad y = f(t), a \leqslant t \leqslant b$ и применяя формулу (5.28), получаем выражение для длины кривой в декартовых координатах:

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{5.29}$$

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением (рис. 5.15)

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2.$$

Переходя к декартовым координатам, получим параметрические уравнения кривой (роль параметра играет $\varphi$):

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \; y = r(\varphi)\sin\varphi, \; \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2.$$

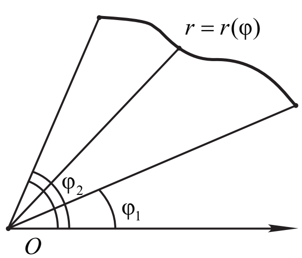


Рис. 5.15.

Применяя формулу (5.28), приходим к формуле длины кривой в полярных координатах (проделайте вычисления самостоятельно):

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{5.30}$$

**Примеры. 1)** $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (окружность радиуса $R$ с центром в начале координат). По формуле (5.28) получаем

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

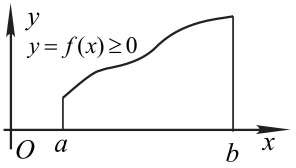
**2)** $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (отрезок параболы).

По формуле (5.29) находим:

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1 + (2x)^2}\, dx = \left( x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left( x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}\,).$$

2. **Площадь криволинейной трапеции** (рис. 5.16).




$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Рис. 5.16.

Обоснование этой формулы будет дано в главе 11.

2. **Площадь криволинейного сектора** (рис. 5.17).

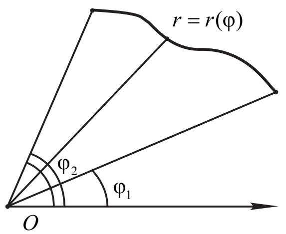



Рис. 5.17.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

3. **Объем тела с известными поперечными сечениями** (рис. 5.18).
Площадь сечения тела плоскостью $x = const$ обозначим $S(x)$, тогда объем тонкого тела, заключенного между двумя близкими плоскостями $x = const$ и $x + dx = const$, равен $S(x)dx$, поэтому для объема $V$ тела получается формула $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

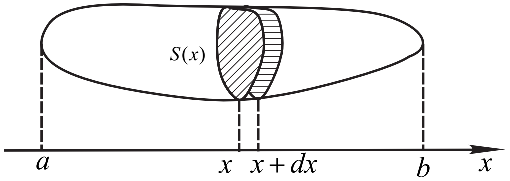



Рис. 5.18.

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

**Объем тела вращения** (рис. 5.19).

4. **Площадь поверхности вращения** (рис. 5.19).
Элемент площади поверхности тела вращения равен

$$dS = 2\pi r \cdot dl = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

поэтому для площади $S$ поверхности тела получается формула

$$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

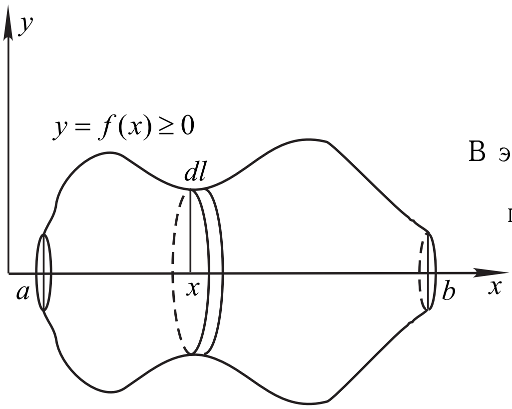



Рис. 5.19.

В этом случае $S(x) = \pi f^2(x)$, поэтому

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

## § 14. Физические приложения определенного интеграла

1. **Масса, координаты центра тяжести и моменты инерции плоской кривой.** Пусть простая кривая задана параметрически уравнениями (5.27), причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, и пусть $\rho(x, y)$ — линейная плотность массы в точке $(x, y)$ кривой. Тогда масса $m$ кривой выражается формулой

$$m = \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

Аналогичная формула для массы кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеет вид

$$m = \int\limits_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Статические моменты (или моменты первого порядка) кривой относительно координатных осей в случае постоянной линейной плотности $\rho \equiv 1$ вычисляются для кривой, заданной уравнениями (5.27), по формулам

$$M_x = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \text{ (момент относительно оси } x\text{)},$$

$$M_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \text{ (момент относительно оси } y),$$

а для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, по формулам

$$M_x = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \quad M_y = \int\limits_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Координаты $(x_0, y_0)$ центра тяжести кривой выражаются формулами

$$x_0 = \frac{M_y}{l}, \quad y_0 = \frac{M_x}{l},$$

где $l$ — длина кривой (см. формулы (5.28) и (5.29)).

Моменты инерции (или моменты второго порядка) кривой относительно осей координат в случае $\rho \equiv 1$ вычисляются по формулам

$$I_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \quad \text{(относительно оси } x),$$

$$I_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \quad \text{(относительно оси } y)$$

или (в декартовых координатах)

$$I_x = \int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \quad I_y = \int\limits_a^b x^2\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

2.**Координаты центра тяжести и моменты инерции плоской фигуры.**

Пусть плоская фигура $G$ ограничена непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, (причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, а поверхностная плотность $\rho \equiv 1$. Тогда статические моменты фигуры $G$ выражаются формулами

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] dx \quad \text{(относительно оси } x),$$

$$M_y = \int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx \quad \text{(относительно оси } y),$$

а координаты $(x_0, y_0)$ центра тяжести фигуры вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{S}, \quad y_0 = \frac{M_x}{S},$$

где $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$ — площадь фигуры $G$.

Моменты инерции фигуры $G$ относительно осей координат выражаются формулами

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left[f_2^3(x) - f_1^3(x)\right] dx \quad \text{(относительно оси } x),$$

$$I_y = \int_a^b x^2\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx \quad \text{(относительно оси } y).$$

**Задание.** Объясните (на эвристическом уровне), как получаются эти формулы.

## § 15. Методы приближенного вычисления определенных интегралов

В примерах, с которыми мы имели дело в этой главе, для вычисления определенных интегралов использовалась формула Ньютона-Лейбница. Ее удобно применять тогда, когда первообразная подынтегральной функции является элементарной функцией. Но это не всегда так. Примером может служить интеграл $\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx$, который встречается во многих задачах математической физики.

В таких случаях пользуются приближенным вычислением интегралов. Мы рассмотрим три метода приближенного вычисления определенных интегралов — *метод прямоугольников*, *метод трапеций* и *метод парабол*.

Суть каждого из этих методов состоит в том, что сегмент интегрирования разбивается на несколько равных частичных сегментов, на каждом из которых подынтегральная функция заменяется более простой функцией: постоянной (то есть многочленом нулевой степени) в методе прямоугольников, линейной функцией (то есть многочленом первой степени) в методе трапеций, квадратичной функцией (то есть многочленом второй степени) в методе парабол. Затем вычисляются интегралы по частичным сегментам от этих более простых функций, и их сумма дает приближенное значение для исходного определенного интеграла.

1. **Метод прямоугольников.** Требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{5.31}$$

Разобьем сегмент $[a, b]$ на $n$ равных частичных сегментов точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Ведем обозначение:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h.$$

Величина $h$ называется *шагом* приближенного интегрирования.

Пусть $\xi_i$ – середина частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$. На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ заменим функцию $f(x)$ постоянной функцией, равной $f(\xi_i)$ (см. рис. 5.20). Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot h, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{5.32}$$

С геометрической точки зрения это равенство означает, что если $f(x) > 0$, то площадь криволинейной трапеции, одной из сторон которой является сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, заменяется площадью прямоугольника со сторонами, равными $h$ и $f(\xi_i)$.

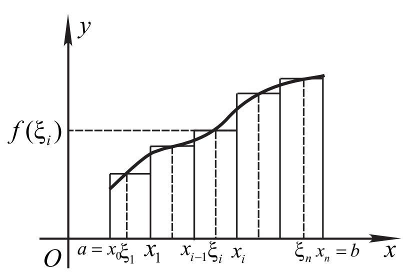


Рис. 5.20.

Просуммировав приближенные равенства (5.32) по $i$

от 1 до $n$, приходим к приближенному равенству для интеграла (5.31):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i). \quad (5.33)$$

Обозначим разность между левой и правой частями этого равенства через $R_n$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) + R_n. \quad (5.34)$$

Равенство (5.34) называется *формулой прямоугольников*, а величина $R_n$ – остаточным членом в этой формуле.

Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

(предел интегральных сумм равен интегралу), поэтому $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, приближенные формулы (5.33) тем точнее, чем больше $n$. При конкретных вычислениях берут какое-то определенное $n$ и вычисляют приближенное значение интеграла по формуле (5.33). Чтобы оценить погрешность этой формулы, нужно знать, как остаточный член $R_n$ зависит от $n$.

**Теорема 13**. Если функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a,b]$ непрерывную производную второго порядка, то найдется точка $\eta \in [a,b]$, такая, что

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\eta) = \frac{b-a}{24} f''(\eta)h^2. \quad (5.35)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то есть

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow F''(x) = f'(x), \quad F'''(x) = f''(x), \quad x \in [a,b]. \quad (5.36)$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и учитывая, что $x_i = \xi_i + \frac{h}{2}$, $x_{i-1} = \xi_i - \frac{h}{2}$, получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x)|_{x_{i-1}}^{x_i} = F(x_i) - F(x_{i-1}) = \\ = F\left(\xi_i + \frac{h}{2}\right) - F\left(\xi_i - \frac{h}{2}\right), \quad i = 1, 2, ..., n.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Разложим $F\left(\xi_i + \frac{h}{2}\right)$ и $F\left(\xi_i - \frac{h}{2}\right)$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $\xi_i$ и остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F\left(\xi_i + \frac{h}{2}\right) = F(\xi_i) + F'(\xi_i) \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}F''(\xi_i) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}F'''(\eta_i) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3,$$

$$F\left(\xi_i - \frac{h}{2}\right) = F(\xi_i) + F'(\xi_i) \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}F''(\xi_i) \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{6}F'''(-\eta_i^*) \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^3,$$

где $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\eta_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Подставляя эти выражения в правую часть (5.37), и учитывая (5.36), приходим к равенству

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F'(\xi_i)h + \frac{1}{48}\left(F'''(\eta_i) + F'''(\eta_i^*)\right)h^3 =$$

$$= f(\xi_i)h + \frac{1}{48}\left(f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*)\right)h^3 =$$

$$= \frac{b-a}{n}f(\xi_i) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*)}{2n}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Просуммируем полученные равенства по $i$ от 1 до $n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) +$$

$$+\frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*)\right)}{2n}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (5.34), получаем выражение для остаточного члена $R_n$:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*))}{2n}.$$

Для доказательства справедливости равенства (5.35) остается доказать, что найдется точка $\eta \in [a, b]$, такая, что

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (f''(\eta_i) + f''(\eta_i^*))}{2n} = f''(\eta) \tag{5.38}$$

Заметим, что левая часть в равенстве (5.38) является средним арифметическим $2n$ значений непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f''(x)$. Поэтому справедливость равенства (5.35) вытекает из следующего утверждения.

**Лемма.** Если $g(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, и $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ — произвольные точки этого сегмента, то найдется точка $\eta \in [a, b]$, такая, что среднее арифметическое значений $g(x_1), g(x_2), ..., g(x_n)$ равно $g(\eta)$, то есть

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)}{n} = g(\eta).$$

Докажем эту лемму. Пусть $m = \min\limits_{[a,b]} g(x)$, $\quad M = \max\limits_{[a,b]} g(x)$. Тогда $\forall x_i \in [a, b]: \quad m \leqslant g(x_i) \leqslant M$. Суммируя эти неравенства по $i$ от 1 до $n$ и деля на $n$, получаем:

$$m \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)}{n} \leqslant M.$$

Мы видим, что дробь в средней части неравенств заключена между минимальным и максимальным значениями непрерывной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Согласно теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение найдется точка $\eta \in [a, b]$, такая, что $g(\eta) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)}{n}$, и тем самым лемма доказана. Применяя лемму к непрерывной функции $g''(x)$ (с заменой $n$ на $2n$), приходим к равенству (5.38).

Замечание. Равенство (5.35) показывает, что при вычислении интеграла по приближенной формуле (5.33) ошибка является величиной порядка $h^2$ $\quad (R_n = O(h^2))$.

**2. Метод трапеций.** Снова рассматриваем интеграл (5.31). Разобьем сегмент $[a, b]$ на $n$ равных частичных сегментов (см. рис. 5.21) точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

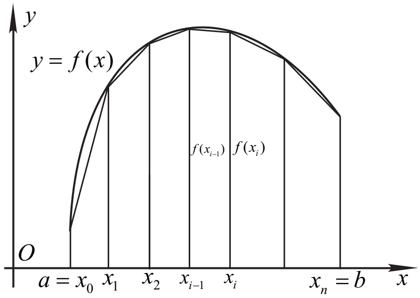



Рис. 5.21.

Как и в п.1, положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h.$$

На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ заменим функцию $f(x)$ линейной функцией $A_i \cdot x + B_i$, график которой проходит через точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $(x_i, f(x_i))$ (см. рис. 5.21). Тогда

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (A_i \cdot x + B_i)dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.39}$$

С геометрической точки зрения это равенство означает, что если $f(x) > 0$, то площадь криволинейной трапеции заменяется площадью обычной трапеции с основаниями, равными $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, и высотой $h$.

Просуммировав приближенные равенства (5.39) по $i$ от 1 до $n$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h = \frac{b-a}{2n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \tag{5.40}$$

Точное значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ отличается от правой части в равенстве (5.40) на некоторую величину $R_n$, то есть имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] + R_n.$$

Это равенство называется *формулой трапеций*.

**Теорема 14.** Если функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a,b]$ непрерывную производную второго порядка, то найдется точка $\eta \in [a,b]$, такая, что

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) = -\frac{b-a}{12} f''(\eta)h^2.$$

Таким образом, как и в формуле прямоугольников, остаточный член в формуле трапеций является величиной порядка $h^2$.

Доказательство теоремы 14 проводится аналогично доказательству теоремы 13.

3. **Метод парабол.** Снова рассмотрим интеграл (5.31). Разобьем сегмент $[a,b]$ на четное число $2n$ равных частичных сегментов точками (см. рис. 5.22) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$. Введем обозначения:

$$\Delta x_i = x_{2i} - x_{2i-2} = \frac{b-a}{n} = h.$$

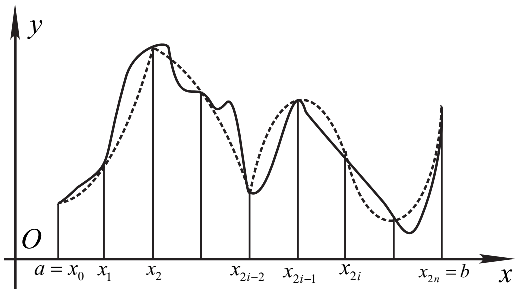



Рис. 5.22.

Рассмотрим сначала сегмент $[x_0, x_2]$. Заменим на этом сегменте функцию $f(x)$ квадратичной функцией $Ax^2 + Bx + C$, причем коэффициенты $A$, $B$ и $C$ выберем так, чтобы график этой функции проходил через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Докажем, что такой выбор коэффициентов $A$, $B$ и $C$ возможен, и притом единственным способом.

Нужно доказать,что существуют такие числа $A$, $B$ и $C$, для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} Ax_0^2 + Bx_0 + C = f(x_0), \\ Ax_1^2 + Bx_1 + C = f(x_1), \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = f(x_2). \end{cases} \tag{5.41}$$

Система (5.41) — это система трех линейных уравнений относительно $A$, $B$ и $C$. Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2) = -\frac{h^3}{4},$$

поскольку $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = -\frac{h}{2}$, $\quad x_0 - x_2 = -h$. Так как определитель отличен отличен от нуля, то система уравнений (5.41) имеет единственное решение. График функции

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad x \in [x_0, x_2]$$

(«отрезок» параболы) изображен на рисунке пунктирной линией. Отметим, что в частном случае, когда точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ лежат на одной прямой, получится $A = 0$, и вместо «отрезка» параболы будет отрезок прямой.

Найдя $A$, $B$ и $C$ из системы (5.41) и вычислив интеграл от функции $Ax^2 + Bx + C$ по сегменту $[x_0, x_2]$, получим (проделайте вычисления самостоятельно):

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \frac{b-a}{6n} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right].$$

Аналогичное приближенное равенство имеет место для любого сегмента $[x_{i-2}, x_{2i}]$, $\quad i = 2, 3, ..., n$ (соответствующие «отрезки» параболы изображены на рисунке пунктирными линиями):

$$\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right].$$

Суммируя эти равенства по $i$ от 1 до $n$, приходим к приближенному равенству для исходного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})] = \\ = \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right], \tag{5.42}$$

а обозначив разность между левой и правой частями приближенного равенства (5.42) через $R_n$, получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right]+R_n,$$

которая называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона*.

**Теорема 15.** Если функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a,b]$ непрерывную производную четвертого порядка, то найдется точка $\eta \in [a,b]$, такая, что

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\eta) = -\frac{b-a}{2880}f^{(4)}(\eta)h^4.$$

Таким образом, остаточный член в формуле парабол является величиной порядка $h^4$. Это означает, что приближенная формула (5.42) метода парабол является при малом $h$ (то есть при больших $n$) более точной, чем приближенные формулы (5.33) и (5.40) метода прямоугольников и метода трапеций. (Доказательство теоремы 15 см. в [1]).

**Пример.** Применим формулу парабол для приближенного вычисления интеграла $\int_0^\pi \sin x dx$. Его точное значение равно 2. Посмотрим, что получится по формуле парабол при самом минимальном значении $n$, то есть при $n=1$.

Полагая в формуле (5.42) $a=0$, $b=\pi$, $n=1$ и учитывая, что $f(0)=f(\pi)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, получим:

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{6}\left[f(0)+f(\pi)+4f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}\pi = 2+\varepsilon,$$

где $\varepsilon = 2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) < 0,1$. Таким образом, уже при $n = 1$ приближенное значение данного интеграла, вычисленное по формуле парабол, отличается от точного значения меньше, чем на 0,1. Этот пример свидетельствует о высокой эффективности метода парабол.

Глава 6

# ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ранее было дано определение предела числовой последовательности:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \text{если} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N: \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что все члены последовательности с номерами, большими $N$, лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $a$. Было доказано, что *монотонная ограниченная последовательность сходится* (следствие из теоремы о пределе монотонной ограниченной функции). Кроме того, отмечалось, что если все $x_n \in [a, b]$, т.е. $a \leqslant x_n \leqslant b$, и при этом существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c,$$

то $c \in [a, b]$, т.е. $a \leqslant c \leqslant b$.

## § 1. Теорема о стягивающейся системе сегментов

Рассмотрим последовательность сегментов

$$[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

такую, что каждый следующий сегмент содержится в предыдущем, т.е. для любого номера $n$ справедливы неравенства

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

и, кроме того, $(b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Такая последовательность сегментов называется *стягивающейся системой сегментов*.

**Теорема 1.** Существует единственная точка, принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы.

Доказательство. Из неравенств $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ следует, что последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая, а последовательность $\{b_n\}$ — невозрастающая. Кроме того, эти последовательности ограничены, так как все их члены лежат на сегменте $[a_1, b_1]$. Следовательно, обе эти последовательности сходятся, а поскольку $(b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Обозначим этот предел буквой $c$. Так как $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность, то $a_n \leqslant c$, и так как $\{b_n\}$ — невозрастающая последовательность, то $b_n \geqslant c$. Таким образом, для любого номера $n$ справедливы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, то есть точка $c$ принадлежит всем сегментам стягивающейся системы. Докажем теперь единственность такой точки.

Предположим противное, то есть предположим, что существует другая точка $d \neq c$, принадлежащая всем сегментам стягивающейся системы. Пусть, например, $d > c$ (случай $d < c$ рассматривается аналогично). Тогда $\forall n: \; a_n \leqslant c < d \leqslant b_n$, откуда $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geqslant d - c > 0,$$

что противоречит условию $(b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 выражает свойство, которое называется *непрерывностью множества вещественных чисел*. Множество рациональных чисел этим свойством не обладает.

## § 2. Предельные точки последовательности

Пусть $\{x_n\}$ — некоторая числовая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность целых положительных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, например, $5, 12, 27, 38, \ldots$. Отметим, что $k_n \geqslant n$. Выберем из последовательности $\{x_n\}$ члены с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots .$$

Полученная таким образом последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

**Примеры:**

1) $\{x_{2n}\} = x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$

2) $\{x_{k_n}\} = x_5, x_{12}, x_{27}, x_{38}, \ldots$

3) сама последовательность $\{x_n\}$ является своей подпоследовательностью $(k_n = n)$.

**Лемма 1.** Если
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$
то любая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится и имеет своим пределом число $a$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Начиная с некоторого номера $N$ все $x_n$ лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $a$. Следовательно, и все члены подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ с номерами, большими $N$, лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $a$, а это и означает, что $x_{k_n} \to a$ при $n \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Может случиться так, что сама последовательность расходится, но у нее есть сходящиеся подпоследовательности. Например, последовательность $\{x_n\} = 1, 1/2, 1, 1/3, \ldots, 1, 1/n, \ldots$ расходится, однако ее подпоследовательности
$$\{x_{2n-1}\} = 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$
и
$$\{x_{2n}\} = 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$$
сходятся: первая сходится к единице, а вторая — к нулю.

**Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса).** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то есть существуют числа $a$ и $b$, такие, что $\forall n$: $a \leqslant x_n \leqslant b$. Разделим сегмент $[a, b]$ пополам. По крайней мере один из двух получившихся сегментов содержит бесконечно много членов последовательности. Обозначим его $[a_1, b_1]$. Пусть $x_{k_1}$ — какой-нибудь член последовательности, лежащий на сегменте $[a_1, b_1]$: $a_1 \leqslant x_{k_1} \leqslant b_1$.

Разделим теперь сегмент $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ ту половину, на которой лежит бесконечно много членов последовательности. Пусть $x_{k_2}$ — какой-нибудь член последовательности с номером $k_2 > k_1$, лежащий на сегменте $[a_2, b_2]$: $a_2 \leqslant x_{k_2} \leqslant b_2$.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим стягивающуюся систему сегментов $\{[a_n, b_n]\}$, так как $b_n - a_n = (b - a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$, и последовательность $\{x_{k_n}\}$, являющуюся подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, причем $\forall n$: $a_n \leqslant x_{k_n} \leqslant b_n$. Согласно теореме 1 существует единственная точка $c$, такая, что
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,$$

а в силу неравенств $a_n \leqslant x_{k_n} \leqslant b_n$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c.$$

Таким образом, мы выделили сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Теорема Больцано–Вейерштрасса доказана.

Замечание. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если $\forall A\ \exists x_n$: $|x_n| > A$. Для неограниченных последовательностей теорема Больцано-Вейерштрасса не верна.

**Пример.** У неограниченной последовательности $\{x_n\} = 1, 2, 3, \ldots \ldots, n, \ldots$ нет сходящихся подпоследовательностей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall A\ \exists N$, $\forall n > N$: $|x_n| > A$. Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Обратное неверно.

**Пример.** Последовательность $\{x_n\} = 0, 1, 0, 2, \ldots, 0, n, \ldots$ является неограниченной, но не является бесконечно большой.

**Задание.** Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

**Определение 1.** Число $a$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящуюся к $a$.

Из теоремы Больцано–Вейерштрасса следует, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

**Определение 2.** Число $a$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если в любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

**Утверждение.** Определения 1 и 2 эквивалентны.

Докажем, что если число $a$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ по определению 1, то оно является предельной точкой этой последовательности и по определению 2 (в обратную сторону доказательство проведите самостоятельно).

Итак, пусть число $a$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ по определению 1, то есть существует такая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a.$$

Тогда в любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ содержится бесконечно много членов подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$, а значит, и бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Это означает, что число $a$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ по определению 2, что и требовалось доказать.

Поставим вопрос: сколько предельных точек может быть у ограниченной последовательности?
Ответ: сколько угодно и даже *несчетное множество*. Чтобы разъяснить этот ответ, поговорим о множествах.

**Некоторые сведения о множествах.**

Говорят, что между элементами двух множеств установлено *взаимно-однозначное соответствие*, если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие некоторый элемент второго множества так, что при этом каждый элемент второго множества соответствует только одному элементу первого множества.

Два множества называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют *одинаковую мощность*.

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Иными словами, множество называется счетным, если его элементы можно занумеровать с помощью натуральных чисел, т.е. составить из них последовательность.

*Множество всех рациональных чисел сегмента* $[0, 1]$ *счетно*. В самом деле, из них можно составить числовую последовательность, например, следующим образом:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots .$$

*Множество всех вещественных чисел сегмента* $[0, 1]$ *несчетно* (докажите это самостоятельно). Если множество эквивалентно множеству всех вещественных чисел сегмента $[0, 1]$, то говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

Вернемся к вопросу о том, сколько предельных точек может быть у ограниченной последовательности, и рассмотрим примеры.

1) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу $a$, то число $a$ — единственная предельная точка этой последовательности.

2) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — произвольные различные числа. Последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$$

имеет $m$ предельных точек: $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

3) Последовательность (составленная из всех рациональных чисел сегмента $[0;1]$)

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

имеет континуум предельных точек: любое число из сегмента $[0,1]$ является предельной точкой этой последовательности, так как в любой $\varepsilon$-окрестности этого числа содержится бесконечно много членов данной последовательности.

**Задание.** Придумайте пример последовательности, у которой счетное множество предельных точек.

Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Тогда у нее есть по крайней мере одна предельная точка.

**Определение.** Наибольшая (наименьшая) предельная точка ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}$ называется *верхним (нижним) пределом* этой последовательности и обозначается так:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \bigl(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\bigr).$$

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Если ограниченная последовательность имеет конечное число предельных точек, то она, очевидно, имеет верхний и нижний пределы. Если же ограниченная последовательность имеет бесконечное множество предельных точек, то существование верхнего и нижнего пределов не является очевидным, поскольку ограниченное бесконечное числовое множество может не иметь наибольшего и наименьшего элементов.

**Теорема 3.** Ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная числовая последовательность и $A$ — множество ее предельных точек. Поскольку $A$ — ограниченное и непустое множество, то существуют его точные грани

$$\sup A = \overline{a} \quad \text{и} \quad \inf A = \underline{a}.$$

Остается доказать, что $\overline{a}$ и $\underline{a}$ — предельные точки последовательности $\{x_n\}$. Докажем это для $\overline{a}$ (для $\underline{a}$ доказательство проводится аналогично).

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Докажем, что в $\varepsilon$-окрестности точки $\overline{a}$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (тем самым и будет доказано, что $\overline{a}$ — предельная точка $\{x_n\}$).

По определению точной верхней грани существует предельная точка $c$ последовательности $\{x_n\}$, такая, что

$$\overline{a} - \frac{\varepsilon}{2} < c \leqslant \overline{a}.$$

Рассмотрим $\varepsilon/2$-окрестность точки $c$. Она расположена в $\varepsilon$-окрестности точки $\overline{a}$ . По определению 2 предельной точки в $\varepsilon/2$-окрестности точки $c$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Но все они содержатся в $\varepsilon$-окрестности точки $\overline{a}$. Таким образом, в $\varepsilon$-окрестности точки $\overline{a}$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, что и требовалось доказать. Теорема 3 доказана.

Замечание. Если $\{x_n\}$ — неограниченная сверху (снизу) последовательность, то пишут

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \infty \quad \Big( \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty \Big).$$

**Пример.** Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = 0, 1, 0, 2, 0, \ldots, n, 0, \ldots.$$

Очевидно, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \infty, \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0.$$

## § 3. Критерий Коши сходимости последовательности.

**Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

В силу произвольности $p$ число $m = n + p$ является произвольным номером, большим $N$. Поэтому определение фундаментальной последовательности можно сформулировать так: последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, $\forall n > N$ и $\forall m > N$: $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

**Пример.** Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{1/n\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $N > 1/\varepsilon$, т.е. $1/N < \varepsilon$. Тогда $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ имеем:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

а это и означает, что последовательность $\{x_n\} = 1/n$ является фундаментальной.

**Задание.** Сформулируйте определение нефундаментальной последовательности.

**Лемма 2.** Фундаментальная последовательность ограничена (доказательство проведите самостоятельно).

**Теорема 4 (критерий Коши сходимости последовательности).** Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство.

а) Необходимость. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом при $n \to \infty$ число $a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, $\forall n > N$: $|x_n - a| < \varepsilon/2$, и также $\forall m > N$: $|x_m - a| < \varepsilon/2$. Отсюда получаем, что для любых $n$ и $m$, больших $N$, справедливо неравенство

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

б) Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Согласно лемме 2 $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_{k_n}\} \to a$ при $n \to \infty$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\varepsilon$- и $\varepsilon/2$-окрестности точки $a$. Начиная с некоторого номера $N_1$ все члены подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ лежат в $\varepsilon/2$-окрестности точки $a$, а начиная с некоторого номера $N_2$ все члены последовательности $\{x_n\}$ отстоят друг от друга не более, чем на $\varepsilon/2$ (так как $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность). Поэтому, начиная с $N = \max\{N_1, N_2\}$, все члены $\{x_n\}$ лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $a$. Это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Теорема 4 доказана.

**Пример.** Докажем с помощью критерия Коши, что последовательность $\{\sin n\}$ расходится. Для этого достаточно доказать, что она не является фундаментальной.

Предположим противное. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$|\sin(n+p) - \sin n| < \varepsilon.$$

Возьмем $p = 2$. Получим

$$|2\sin 1 \cdot \cos(n+1)| < \varepsilon \Longrightarrow |\cos(n+1)| < \frac{\varepsilon}{2\sin 1} \quad \forall n > N,$$

откуда следует, что последовательность $\{\cos n\}$ — бесконечно малая. Далее воспользуемся равенством

$$\cos(n+1) = \cos n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1,$$

из которого имеем

$$\sin n = \frac{\cos n \cdot \cos 1 - \cos(n+1)}{\sin 1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Итак, мы получили:

$$\cos n \to 0 \quad \text{и} \quad \sin n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что противоречит тождеству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$. Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{\sin n\}$ расходится.

## § 4. Второе определение предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X$ и $a$ — предельная точка этого множества, то есть в любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ содержатся точки из $X$, отличные от $a$.

Отметим, что понятия *предельной точки числового множества* и *предельной точки числовой последовательности* — различные понятия. Поясняющий пример: рассмотрим числовое множество $X = \{1; 2\}$ и последовательность

$$\{x_n\} = 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots.$$

У множества $X$, состоящего из двух чисел, нет предельных точек, тогда как у последовательности $\{x_n\}$, очевидно, их две: $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$.

**Определение 1 (по Коши).** Число $b$ называется *пределом функции $f(x)$ при $x \to a$*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Это определение было дано в разделе 2.2. Дадим другое определение предела функции в точке.

**Определение 2 (по Гейне).** Число $b$ называется *пределом функции $f(x)$ при $x \to a$*, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и такой, что $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$.

**Задание.** Сформулируйте отрицание определения предела функции по Гейне, то есть сформулируйте определение того, что

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq b.$$

**Теорема 5.** Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство.

1) Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{по Коши}. \tag{6.1}$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{по Гейне}, \tag{6.2}$$

то есть

$$\forall\{x_n\} \to a(x_n \neq a) : \{f(x_n)\} \to b.$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \to a$ $(x_n \neq a)$ и возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия (6.1) найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - a| < \delta, \tag{6.3}$$

а поскольку $\{x_n\} \to a$ и $x_n \neq a$, то существует такое $N$, что

$$\forall n > N : \quad 0 < |x_n - a| < \delta. \tag{6.4}$$

Из (6.3) и (6.4) следует, что $\forall n > N : |f(x_n) - b| < \varepsilon$, а это и означает, что $\{f(x_n)\} \to b$. Таким образом, справедливость (6.2) доказана.

2) Пусть выполнено условие (6.2).

Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq b \quad \text{по Коши}. \tag{6.5}$$

Это означает, что $\exists\varepsilon > 0$, такое, что

$$\forall\delta > 0 \quad \exists x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : \ |f(x) - b| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим произвольную последовательность

$$\{\delta_n\} \to +0 \ (\delta_n > 0).$$

Согласно нашему предположению, для любого $\delta_n$ существует число $x_n$, удовлетворяющее условию

$$0 < |x_n - a| < \delta_n, \tag{6.6}$$

для которого

$$|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon. \tag{6.7}$$

Поскольку $\{\delta_n\} \to +0$, то из (6.6) следует, что $\{x_n\} \to a$ и $x_n \neq a$. Отсюда в силу условия (6.2)получаем: $\{f(x_n)\} \to b$ и, значит, $|f(x_n) - b| \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, в силу неравенства (6.7) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение (6.5) неверно, и, следовательно,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \underline{\text{по Коши}}.$$

Теорема 5 доказана.

**Примеры.** 1) Пусть $f(x) = x$. Докажем, пользуясь определением предела функции по Гейне, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Для любой последовательности $\{x_n\} \to a$ имеем: $\{f(x_n)\} = \{x_n\} \to a$. Согласно определению предела функции по Гейне это означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a.$$

2) Пусть $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует. Возьмем

$$x_n = \frac{1}{\pi n}, \quad \text{тогда} \quad \{x_n\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad x_n \neq 0.$$

При этом $\{f(x_n)\} = \{\sin \pi n\} = \{0\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем теперь

$$x'_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{тогда} \quad \{x'_n\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad x'_n \neq 0.$$

При этом $\{f(x'_n)\} = \{\sin(2\pi n + \pi/2)\} = \{1\} \to 1$ при $n \to \infty$.

Итак, для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, сходящихся к нулю и таких, что $x_n \neq 0$ и $x'_n \neq 0$, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ имеют разные пределы. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

**Определение предела функции при $x \to \infty$ по Гейне.**

Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и, начиная с некоторого номера, $x_n > 0$, то будем писать $\{x_n\} \to +\infty$ (в этом случае говорят, что последовательность сходится к $+\infty$).

**Определение (по Гейне)**. Число $b$ называется *пределом функции* $f(x)$*при* $x \to +\infty$, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к $+\infty$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$.

**Задание.** Докажите эквивалентность двух определений (по Коши и по Гейне) предела функции при $x \to +\infty$.

## § 5. Критерий Коши существования предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X$ и $a$ — предельная точка этого множества.

**Определение.** Говорят, что $f(x)$ удовлетворяет в точке $a$ *условию Коши*, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для любых значений аргумента $x'$ и $x''$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Заметим, что условие Коши для функции аналогично свойству фундаментальности для числовой последовательности.

**Задание.** Сформулируйте определение того факта, что $f(x)$ не удовлетворяет в точке $a$ условию Коши.

Докажем теорему о *критерии Коши существования предела функции в точке.*

**Теорема 6.** Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке $a$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Тогда, согласно определению предела функции по Коши, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, такое, что

$$|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad 0 < |x' - a| < \delta,$$

$$|f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad 0 < |x'' - a| < \delta.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) + (b - f(x''))| \leqslant \\ \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$$

при $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$. Таким образом, функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $a$ условию Коши. Утверждение о необходимости условия Коши доказано.

2) Достаточность. Пусть $f(x)$ удовлетворяет в точке $a$ условию Коши. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к $a$ (при этом $x_n \neq a$). В соответствии с определением предела функции по Гейне нужно доказать, что $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу $b$, причем это число одно и то же для всех $\{x_n\} \to a$ $(x_n \neq a)$. С этой целью докажем сначала фундаментальность последовательности $\{f(x_n)\}$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно условию Коши $\exists\delta > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{при } 0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta. \tag{6.8}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, то для указанного $\delta$ найдется номер $N$, такой, что

$$\forall n > N: \quad 0 < |x_n - a| < \delta,$$

и также

$$\forall m > N: \quad 0 < |x_m - a| < \delta.$$

Из этих неравенств в силу (6.8) следует, что

$$\forall n > N \quad \text{и} \quad \forall m > N: \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon,$$

то есть $\{f(x_n)\}$ — фундаментальная последовательность. Следовательно, $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу $b$.

Итак, мы доказали, что $\forall\{x_n\} \to a$ $(x_n \neq a)$ соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу $b$. Остается доказать, что число $b$ будет одно и то же для всех последовательностей $\{x_n\}$, сходящихся к $a$ (и таких, что $x_n \neq a$).

Пусть для $\{x_n\} \to a$ $(x_n \neq a)$ соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$, а для $\{x'_n\} \to a$ $(x'_n \neq a)$ соответствующая ей последовательность $\{f(x'_n)\}$ сходится к $b'$. Составим последовательность

$$\{x''_n\} = x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots .$$

Ясно, что $\{x''_n\} \to a$ $(x''_n \neq a)$, и поэтому $\{f(x''_n)\}$ сходится к некоторому числу $b''$. Следовательно, и подпоследовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ последовательности $\{f(x''_n)\}$ сходятся к этому числу $b''$. Но $\{f(x_n)\} \to b$, $\{f(x'_n)\} \to b'$. Таким образом, $b = b' = b''$, что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

**Задание.** Сформулируйте условие Коши для функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и докажите теорему о критерии Коши существования предела функции при $x \to +\infty$.

Глава 7

# ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

## § 1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций

**Теорема 1 (о локальной ограниченности непрерывной функции).** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $a$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.
Доказательство. Зададим какое-нибудь $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = 1$). По определению непрерывности функции $\exists \delta > 0$, такое, что

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta,$$

т.е. $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ в $\delta$-окрестности точки $a$. Это и означает, что функция $y = f(x)$ ограничена в $\delta$-окрестности точки $a$. Теорема 1 доказана.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на множестве $X$, т.е. непрерывна в каждой точке этого множества. Будет ли $f(x)$ ограниченной на множестве $X$? Ответ неоднозначен.

**Пример.** Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $0 < x < 1$, но не ограничена на этом интервале.

Если же множество $X$ — сегмент, то ответ на поставленный вопрос — положительный.

**Теорема 2 (1-ая теорема Вейерштрасса).**
Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.
Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Допустим, что $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in [a, b] : \quad |f(x_n)| > n. \tag{7.1}$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$. Она ограничена, поскольку все $x_n$ лежат на сегменте $[a, b]$, и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ (теорема Больцано–Вейерштрасса). Пусть $\{x_{k_n}\} \to c$. Поскольку все

$x_{k_n} \in [a, b]$, то $c \in [a, b]$ и поэтому $f(x)$ непрерывна в точке $c$. Отсюда следует, что $f(x_{k_n}) \to f(c)$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, $|f(x_{k_n})| > k_n$ в силу (7.1), т.е. $\{f(x_{k_n})\}$ — бесконечно большая последовательность и, следовательно, расходится. Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Замечание. Для интервала теорема 2 не верна (см. пример выше).

**Задание.** Установите, в каком месте не пройдет доказательство теоремы, если сегмент $[a, b]$ заменить на интервал $(a, b)$.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена сверху (снизу) на множестве $X$. Тогда она имеет на множестве $X$ точную верхнюю (нижнюю) грань:

$$M = \sup_X f(x) \quad (m = \inf_X f(x)).$$

При этом функция $f(x)$ может принимать, а может и не принимать значения, равного $M$ (соответственно, $m$).

**Пример.** Рассмотрим функцию (рис. 7.1)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\sup_{[0,1]} f(x) = 1 = f(1), \qquad \inf_{[0,1]} f(x) = 0,$$

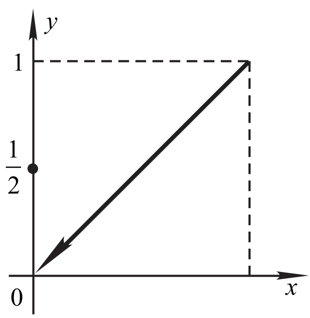


Рис. 7.1.

но при этом $f(x)$ не имеет значения, равного нулю.

Если функция $f(x)$ принимает в какой-то точке значение, равное

$$\sup_X f(x) \quad (\inf_X f(x)),$$

то говорят, что она *достигает на множестве $X$ своей точной верхней (нижней) грани*. Подчеркнем, что *иметь* точные грани и *достигать* их — разные свойства функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда она ограничена на $[a, b]$ и поэтому имеет

$$M = \sup_{[a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

**Теорема 3 (2-ая теорема Вейерштрасса).** Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте своих точных граней.
Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Докажем теорему 3 для точной верхней грани.

Допустим, что функция $f(x)$ не принимает на $[a, b]$ значения $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда $\forall x \in [a, b]$: $f(x) < M$. Введем функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Она непрерывна на сегменте $[a, b]$ (поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $M - f(x) \neq 0$) и положительна. По теореме 2 $F(x)$ ограничена на $[a, b]$, поэтому $\exists A > 0$ такое, что

$$0 < F(x) < A \quad \forall x \in [a, b],$$

или

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < A \quad \forall x \in [a, b],$$

откуда следует, что

$$f(x) < M - \frac{1}{A} \quad \forall x \in [a, b].$$

Получилось, что число $M - 1/A$, которое меньше $M$, является верхней гранью $f(x)$ на $[a, b]$. Но это противоречит тому, что $M$ — наименьшая из верхних граней $f(x)$ на $[a, b]$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.
Замечание. Если функция $f(x)$ достигает на множестве $X$ своей точной верхней (нижней) грани, то она имеет на этом множестве максимальное (минимальное) значение:

$$\max_X f(x) = \sup_X f(x) \quad \left(\min_X f(x) = \inf_X f(x)\right).$$

Если же $f(x)$ не достигает на множестве $X$ своей точной верхней (нижней) грани, то она не имеет на $X$ максимального (минимального) значения. Из второй теоремы Вейерштрасса следует, что *непрерывная на сегменте функция имеет на этом сегменте максимальное и минимальное значения.*

## § 2. Равномерная непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $X$. Напомним определение равномерно непрерывной функции.

**Определение.** Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на промежутке* $X$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall x', x'' \in X$ и удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Из определения следует, что если $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $X$, то она непрерывна в каждой точке $x' \in X$. Отличие равномерной непрерывности на промежутке $X$ от «просто непрерывности» на этом промежутке состоит в том, что в случае равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0$ существует «нужное» $\delta > 0$, общее для всех точек $x' \in X$ ($\delta$ зависит от $\varepsilon$, но не зависит от $x'$), а в случае «просто непрерывности» $\forall x' \in X$ по заданному $\varepsilon > 0$ найдется «нужное» $\delta > 0$, но это $\delta = \delta(\varepsilon, x')$ (т.е. $\delta$ в данном случае зависит и от $\varepsilon$, и от $x'$), и может не существовать общего $\delta(\varepsilon) > 0$ для всех $x' \in X$.

### Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функции

Если функция $y = f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $X$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и $\varepsilon$, параллельными осям $Ox$ и $Oy$, можно так переместить вдоль графика функции, что график не будет пересекать сторон прямоугольника, параллельных оси $Ox$, а будет пересекать лишь стороны, параллельные оси $Oy$.

**Теорема 4 (теорема Кантора).** Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Допустим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists x', x'' \in [a, b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, а $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon$.

Возьмем последовательность $\{\delta_n\} \to +0$ ($\delta_n > 0$). Согласно нашему предположению, $\forall \delta_n > 0$ $\exists x_n', x_n'' \in [a, b]$, для которых

$$|x_n'' - x_n'| < \delta_n, \quad \text{а} \quad |f(x_n'') - f(x_n')| \geqslant \varepsilon. \tag{7.2}$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n'\}$. Она ограничена, поскольку все ее члены лежат на сегменте $[a, b]$, и поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}'\}$. Пусть $x_{k_n}' \to c$ при $n \to \infty$. Так как $\left|x_{k_n}'' - x_{k_n}'\right| < \delta_{k_n}$ и $\delta_{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $x_{k_n}'' \to c$, а поскольку все

$x'_{k_n} \in [a,b]$, то $c \in [a,b]$ и, следовательно, $f(x)$ непрерывна в точке $c$. Поэтому $f(x'_{k_n}) \to f(c)$, $f(x''_{k_n}) \to f(c)$ при $n \to \infty$, откуда следует,что $\left|f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})\right| \to 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, в силу неравенства (7.2) имеем неравенство

$$\left|f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})\right| \geqslant \varepsilon,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \left|f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})\right| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Для интервала теорема Кантора не верна. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

## § 3. Возрастание и убывание функции в точке. Локальный экстремум

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a,b)$ и $c \in (a,b)$.

**Определение.** Говорят, что $f(x)$ *возрастает в точке* $c$, если существует окрестность точки $c$, в которой $f(x) > f(c)$ при $x > c$ и $f(x) < f(c)$ при $x < c$.

Аналогично определяется *убывание функции в точке* $c$.

**Теорема 5.** Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $c$ и $f'(c) > 0$ $(< 0)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) в точке $c$.

Доказательство. Пусть $f'(c) > 0$ (случай $f'(c) < 0$ рассматривается аналогично). По определению производной

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

то есть

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Возьмем $\varepsilon = f'(c)$. Тогда получим:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \text{при} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

откуда следует, что в $\delta$-окрестности точки $c$ $f(x) > f(c)$ при $x > c$ и $f(x) < f(c)$ при $x < c$. Это и означает, что $f(x)$ возрастает в точке $c$. Теорема 5 доказана.

Замечание. Положительность $f'(c)$ — только достаточное, но не необходимое условие возрастания дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $c$. Например, функция $f(x) = x^3$ возрастает в точке $x = 0$, но $f'(0) = 0$.

Пусть снова $f(x)$ определена на $(a, b)$ и $c \in (a, b)$.

**Определение.** Говорят, что в точке $c$ функция $f(x)$ имеет *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки $c$, в которой $f(x) < f(c)$ (соответственно, $f(x) > f(c)$) при $x \neq c$.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием: *локальный экстремум*.

**Теорема 6 (теорема Ферма).** Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $c$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ имеет в точке $c$ локальный максимум (для случая локального минимума рассуждения аналогичные), т.е. существует такая окрестность точки $c$, в которой $f(x) < f(c)$ при $x \neq c$. Предположим, что $f'(c) \neq 0$. Допустим, что $f'(c) > 0$. Тогда по теореме 5 функция $f(x)$ возрастает в точке $c$ и, следовательно, существует окрестность точки $c$, в которой $f(x) > f(c)$ при $x > c$. Но это противоречит неравенству $f(x) < f(c)$ при $x \neq c$. Следовательно, $f'(c)$ не может быть больше 0. Аналогично доказывается, что $f'(c)$ не может быть меньше 0. Поэтому $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы. Если дифференцируемая в точке $c$ функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум в этой точке, то касательная к графику функции в точке $(c, f(c))$ параллельна оси $Ox$.

Замечание. Условие $f'(c) = 0$ — только необходимое, но не достаточное условие локального экстремума функции $f(x)$ в точке $c$. Например, функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет условию $f'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ экстремума у функции нет.

## § 4. Теоремы Ролля и Лагранжа

**Теорема 7 (теорема Ролля).** Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a, b)$;
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она имеет на $[a,b]$ максимальное и минимальное значения (это было отмечено после доказательства 2-ой теоремы Вейерштрасса). Положим

$$M = \max_{[a,b]} f(x), \quad m = \min_{[a,b]} f(x).$$

Возможны 2 случая.
1) $M = m$. Тогда $f(x) = M = m = \text{const}$ и $\forall c \in (a,b) : f'(c) = 0$.
2) $M > m$. Тогда по крайней мере одно из значений $M$ и $m$ функция принимает во внутренней точке $c$ сегмента $[a,b]$. Рассмотрим возможные подслучаи.

а) Значение $M$ принимается во внутренней точке $c$, а $m = f(a) = f(b)$.

б) Значение $m$ принимается во внутренней точке $c$, а $M = f(a) = f(b)$.

в) Оба значения $M$ и $m$ принимаются во внутренних точках $[a,b]$ (пусть, например, значение $M$ принимается во внутренней точке $c$).

В любом случае по теореме Ферма $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

### Физический смысл теоремы Ролля

Пусть $x$ — время, $y = f(x)$ — координата точки, движущейся по оси $Oy$, в момент времени $x$. Тогда в моменты времени $a$ и $b$ точка имеет одну и ту же координату $f(a) = f(b)$, т.е. занимает на оси $Oy$ одно и то же положение. В промежутке времени от $a$ до $b$ точка каким-то образом движется и в момент $b$ возвращается в исходное положение. Ясно, что для того, чтобы вернуться назад, она должна в некоторый момент времени $c$ остановиться, то есть ее скорость в этот момент равна нулю: $f'(c) = 0$.

**Теорема 8 (теорема Лагранжа)**. Пусть выполнены условия:
1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,b)$.
Тогда $\exists c \in (a,b)$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа.*

Доказательство. Введем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема в интервале $(a, b)$;

3) $F(a) = F(b) = f(a)$.

По теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$: $F'(c) = 0$, то есть

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда следует равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, что и требовалось доказать.

### Физический смысл теоремы Лагранжа

Пусть $x$ — время, $y = f(x)$ — координата точки, движущейся по оси $Oy$, в момент времени $x$. Тогда $f'(c)$ — мгновенная скорость точки в момент $c$, а $(f(b) - f(a))/(b - a)$ — средняя скорость точки на временном промежутке $[a, b]$.

Формула Лагранжа, записанная в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

показывает, что существует такой момент времени $c$, в который мгновенная скорость точки равна ее средней скорости на промежутке времени $[a, b]$.

Замечание. Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ две точки: $x_0$ и $x_0 + \Delta x$. Применим формулу Лагранжа к сегменту $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x.$$

Точку $\xi$ можно представить в виде $\xi = x_0 + (\xi - x_0) = x_0 + \theta \cdot \Delta x$, где $0 < \theta < 1$. Таким образом, для приращения функции в точке $x_0$ справедливо равенство:

$$\Delta f\Big|_{x_0} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Оно называется *формулой конечных приращений*. Отметим, что главная часть приращения функции в точке $x_0$, то есть дифференциал функции в точке $x_0$, выражается формулой

$$df\Big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

## Некоторые теоремы, доказываемые с помощью формулы Лагранжа

Пусть $X$ — промежуток, т.е. интервал, сегмент, полупрямая или вся прямая.

**Теорема 9.** Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $X$ и $\forall x \in X$: $f'(x) = 0$, то $f(x) = \text{const}$ на $X$.

Доказательство. Пусть $x_0$ — фиксированная точка, а $x$ — произвольная точка из $X$. По формуле Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0,$$

т.к. $f'(c) = 0$. Отсюда следует, что $f(x) = f(x_0) = \text{const}\ \forall x \in X$, что и требовалось доказать.

**Следствие.** В главе 5 была сформулирована теорема 1 (основная теорема интегрального исчисления): если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке $X$, то $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$ на $X$. Было показано, что $\big(F_1(x) - F_2(x)\big)' = 0\ \forall x \in X$. В силу доказанной сейчас теоремы 9 отсюда следует, что $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$ на $X$, и тем самым теорема 1 из главы 5 доказана.

Докажем теорему, устанавливающую необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции.

**Теорема 10.** Для того, чтобы дифференцируемая на промежутке $X$ функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на $X$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X$: $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$).

Доказательство.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in X$. Докажем, что $f(x)$ не убывает на промежутке $X$. Рассмотрим две произвольные точки $x_1, x_2 \in X$. Пусть для определенности $x_2 > x_1$. По формуле Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(\xi) \geqslant 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, откуда следует, что

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1,$$

а это и означает, что функция $f(x)$ не убывает на промежутке $X$.

Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает на $X$, т.е.

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1, \quad x_1, x_2 \in X.$$

Докажем, что $f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in X$. Допустим противное, т.е. что $\exists c \in X$: $f'(c) < 0$. Тогда по теореме 5 $f(x)$ убывает в точке $c$, то есть существует такая окрестность точки $c$, в которой

$$f(x) < f(c) \quad \text{при} \quad x > c \quad \text{и} \quad f(x) > f(c) \quad \text{при} \quad x < c.$$

Первое из этих неравенств противоречит условию неубывания функции: $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Следовательно, наше предположение неверно, и $f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in X$. Теорема 10 доказана.

Замечание. Для возрастания функции $f(x)$ на промежутке $X$ достаточно, *но не необходимо*, чтобы выполнялось неравенство $f'(x) > 0\ \forall x \in X$ (докажите это самостоятельно).

Поставим вопрос: как связаны возрастание функции в точке и возрастание на промежутке?

**Утверждение 1.** Из возрастания функции в данной точке не следует ее возрастание в какой-нибудь окрестности этой точки.

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция возрастает в точке $x = 0$ (это следует из того, что $f'(0) = 1 > 0$), но при этом она не является возрастающей ни в какой $\varepsilon$-окрестности точки $x = 0$ (это следует из того, что в любой $\varepsilon$-окрестности точки $x = 0$ производная $f'(x)$ имеет в каких-то точках отрицательные значения; докажите это).

**Утверждение 2.** Если $f(x)$ возрастает на некотором интервале, то она возрастает в каждой точке этого интервала (докажите самостоятельно).

**Утверждение 3 (обратное к утверждению 2).** Если $f(x)$ возрастает в каждой точке данного интервала, то она возрастает на этом интервале (докажите самостоятельно). При всей очевидности утверждения 3 его строгое доказательство — не очень простое.

Сформулируем и докажем теорему о достаточном условии равномерной непрерывности функции.

**Теорема 11.** Если функция $f(x)$ имеет на промежутке $X$ ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $X$.

Доказательство. Пусть $|f'(x)| \leqslant M\ \forall x \in X$, где $M > 0$ — некоторое число. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta = \varepsilon / M$.

Тогда $\forall x', x''$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta = \varepsilon/M$, получаем:

$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)(x'' - x')| \leqslant M \cdot |x'' - x'| < M\delta = \varepsilon,$$

а это и означает, что $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $X$. Теорема 11 доказана.

**Пример.** $f(x) = \ln x$, $X = (a, +\infty)$, где $a > 0$. Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \Big|f'(x)\Big| \leqslant \frac{1}{a} \quad \forall x \in (a, +\infty),$$

откуда вытекает равномерная непрерывность функции $f(x) = \ln x$ на полупрямой $X = (a, +\infty)$.

**Задания.** 1) Докажите, что функция $f(x) = \ln x$ не является равномерно непрерывной на полупрямой $(0, +\infty)$.

2) Приведите пример функции $f(x)$, которая равномерно непрерывна на промежутке $X$, но $f'(x)$ не ограничена на $X$.

## § 5. Формула Коши. Правило Лопиталя

**Теорема 12.** Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a, b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a, b)$;

3) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$.

Тогда $\exists c \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{(формула Коши)}.$$

Замечание. Отметим, что в формуле Коши знаменатель в левой части равенства не равен 0, т.е. $g(a) \neq g(b)$. В самом деле, если допустить, что $g(a) = g(b)$, то для $g(x)$ будут выполнены все условия теоремы Ролля и тогда должна существовать точка $x \in (a, b)$, такая, что $g'(x) = 0$, что противоречит условию 3 теоремы.

Доказательство.

1-ая попытка. По формуле Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad g(b) - g(a) = g'(c)(b - a),$$

откуда следует, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)(b - a)}{g'(c)(b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Но такое «доказательство» не состоятельно! (подумайте, почему).

2-ая попытка. Введем функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема в интервале $(a, b)$;

3) $F(a) = F(b) = f(a)$.

По теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$: $F'(c) = 0$, то есть

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши при $g(x) = x$. В этом случае $g(a) = a$, $g(b) = b$, $g'(c) = 1$ и формула Коши переходит в формулу Лагранжа.

## Правило Лопиталя

Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

то есть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$. Рассмотрим

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Он называется *неопределенностью типа* 0/0.

Правило Лопиталя позволяет в определенных случаях раскрыть эту неопределенность, т.е. вычислить данный предел.

**Теорема 13.** Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки $a$ (при этом в самой точке $a$ они могут быть даже не определены);

2)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0;$$

3) $g'(x) \neq 0$ для любого $x$ из указанной проколотой окрестности точки $a$ (в самой точке $a$ может быть $g'(a) = 0$);

4) существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта формула называется *правилом Лопиталя.*

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $a$ по непрерывности, т.е. положим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными во всей указанной окрестности точки $a$. Пусть $x$ — произвольная точка из этой окрестности, отличная от $a$. По формуле Коши

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где $\xi$ — некоторая точка из интервала $(a, x)$. Так как $f(a) = g(a) = 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x \to a$. Тогда $\xi \to a$, и предел правой части равенства существует по условию теоремы. Следовательно, существует предел левой части и он равен пределу правой части, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 13 доказана.

**Примеры.**

1) Применим правило Лопиталя к первому замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(отметим, что такой способ обоснования первого замечательного предела *некорректен*, так как при выводе формулы $(\sin x)' = \cos x$ использовался первый замечательный предел).

2)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^x\ln a-ax^{a-1}}{1}=a^a\ln a-a^a=a^a(\ln a-1).$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)'}{(3x^2)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos^{-3}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Здесь правило Лопиталя применялось дважды.

Заметим, что из рассмотренного примера можно получить полезную асимптотическую формулу. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\frac{1}{3}x^3}=1,$$

то

$$\operatorname{tg}x-x\sim\frac{1}{3}x^3\quad\text{при}\quad x\to 0,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}x-x-\frac{1}{3}x^3=o\left(x^3\right)\quad\Rightarrow\quad\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\quad\text{при}\quad x\to 0.$$

Замечания.

1) Если в теореме 13 условие 4) заменить условием

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty,$$

означающим, что $f'(x)/g'(x)$ — бесконечно большая функция при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

2) Если в теореме 13 условие 2) заменить условием

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

то теорема остается в силе, т.е. правило Лопиталя имеет место и для неопределенности типа $\infty/\infty$.

3) Правило Лопиталя имеет место для односторонних пределов и для пределов при $x \to \infty$.

**Теорема 13-а** (без доказательства). Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при $x > c$;

2)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \text{ (либо } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty);$$

3) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (c, +\infty)$;

4) существует

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполняется равенство

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Примеры.**

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Так как $x^x = e^{x\ln x}$ и $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$

(здесь мы воспользовались правилом Лопиталя), то $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, где $\alpha$ — положительное число. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

то есть *функция* $\ln x$ *растет при* $x \to +\infty$ *медленнее, чем степенная функция* $x^\alpha$ *с любым* $\alpha > 0$. Иногда это записывают так:

$$\ln x \ll x^\alpha \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, где $n \in \mathbb{N}$, $\ a > 1$. Применяя правило Лопиталя $n$ раз, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x(\ln a)^n} = 0,$$

т.е. *степенная функция* $x^n$ *растет при* $x \to +\infty$ *медленнее, чем показательная функция* $a^x$ *(то же самое относится к* $x^\alpha$ *с любым* $\alpha > 0$*):*

$$x^\alpha \ll a^x \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

4) Если не существует $\lim[f'(x)/g'(x)]$, то отсюда не следует, что не существует $\lim[f(x)/g(x)]$.

Рассмотрим в качестве примера предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \sin x} \quad \left(\text{неопределенность типа} \quad \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Имеем:

$$\frac{(x + \sin x)'}{(2x + \sin x)'} = \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x} = \left(1 - \frac{1}{2 + \cos x}\right).$$

Предел функции $\left(1 - \dfrac{1}{2 + \cos x}\right)$ (то есть предел отношения производных функций $x + \sin x$ и $2x + \sin x$) при $x \to +\infty$ не существует, так как эта функция является периодической с периодом $2\pi$, причем ее значения изменяются от 0 до 2/3. Вместе с тем, предел отношения самих функций $x + \sin x$ и $2x + \sin x$ существует:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{\sin x}{x}}{2 + \dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}.$$

## § 6. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $(n+1)$-го порядка в окрестности точки $x_0$ (в таком случае говорят, что функция $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$). Пусть $x$ — любая (фиксированная) точка из этой окрестности. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \tag{7.3}$$

Применим к интегралу $\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt$ формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)df'(t) =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt.$$

К интегралу в правой части последнего равенства снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = -\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)d\frac{(x-t)^2}{2} = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2}df''(t) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt.$$

Используя эти равенства, из (7.3) получаем:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ +\frac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в правой части последнего равенства и продолжая далее процесс интегрирования по частям, после $n$ шагов придем к равенству

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \qquad (7.4)$$

Введем обозначение

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{7.5}$$

Тогда равенство (7.4) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x), \tag{7.6}$$

где $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $0! = 1$.

Равенство (7.6) называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ *с центром разложения в точке* $x_0$, многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$, а функция $R_{n+1}(x)$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора. Выражение (7.5) называется *остаточным членом в интегральной форме*.

Нетрудно проверить, что для многочлена Тейлора $P_n(x)$ справедливы равенства $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

**Теорема 14.** Если функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$, то для любого $x$ из этой окрестности справедливо равенство (7.6), где $R_{n+1}(x)$ выражается формулой (7.5).

**Следствие 1**. Применяя к интегралу (7.5) формулу среднего значения, получаем

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{где } \xi \in [x_0, x].$$

Таким образом, для остаточного члена формулы Тейлора получилось выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{7.7}$$

где $\xi$ — некоторая точка сегмента $[x_0, x]$, ее можно представить в виде $\xi = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$, $\quad 0 < \theta < 1$.

Выражение (7.7) называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

**Следствие 2**. Так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и так как $\xi \to x_0$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x_0).$$

Поэтому $f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, и равенство (7.7) принимает вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{\alpha(x)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right)$$

Подставляя это выражение в (7.6), приходим к равенству

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^{n+1}\right) = \\ &= P_{n+1}(x) + R_{n+2}(x), \end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$R_{n+2}(x) = o\left((x - x_0)^{n+1}\right). \tag{7.9}$$

Равенства (7.8) и (7.9) получены нами при условии, что функция $f(x)$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$. Заменив $n + 1$ на $n$, получим следующее утверждение.

**Теорема 15.** Если функция $f(x)$ $n$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$, то справедливо равенство

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad R_{n+1}(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \text{ при } x \to x_0.$$

Выражение

$$R_{n+1}(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

называется *остаточным членом в форме Пеано.*

Замечание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет место при меньших требованиях к функции $f(x)$, чем в теореме 14, а именно, можно отказаться от требования непрерывности производной $(n+1)$-ого порядка. И также формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет место при меньших требованиях к функции $f(x)$, чем в теореме 15, а именно, достаточно потребовать, чтобы $f(x)$ имела производную $n$–го порядка в точке $x_0$ (см. [1]).

## § 7. Формула Маклорена и ее применения

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

при $x_0 = 0$ (в этом случае формулу Тейлора принято называть *формулой Маклорена*):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \text{ при } x \to 0 \text{ (форма Пеано)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ (форма Лагранжа)}.$$

Выведем разложения по формуле Маклорена для некоторых элементарных функций.

1) $\boldsymbol{f(x) = e^x}$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$ и $\forall n\ f^{(n)}(0) = 1$, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{(форма Пеано)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{(форма Лагранжа)}. \quad (7.10)$$

Из (7.10) для любого фиксированного значения $x$ получаем оценку:

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \leqslant \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Это позволяет вычислить $e^x$ с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора $P_n(x)$ для $e^x$ с достаточно большим $n$. В частности, полагая $x = 1$, получаем:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \text{ откуда } e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Поставим вопрос: сколько слагаемых (то есть какое $n$) нужно взять, чтобы найти приближенное значение числа $e$ с точностью до $10^{-6}$? Из (7.10) следует:

$$\left|R_{n+1}(1)\right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Так как $10! > 3 \cdot 10^6$, то $|R_{10}(1)| < 10^{-6}$, то есть достаточно взять $n = 9$:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} \text{ с точностью до } 10^{-6}.$$

2) $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, то общий член формулы Маклорена для $\sin x$ имеет вид

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

где

$$R_{2n+1}(x) = o\left(x^{2n}\right) \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{(форма Пеано)},$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ 0 < \theta < 1$$

(форма Лагранжа).

Отсюда для любого фиксированного значения $x$ получаем оценку:

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Это позволяет вычислить $\sin x$ для любого $x$ с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора $P_n(x)$ для $\sin x$ с достаточно большим $n$.

Например, для приближенного вычисления $\sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ с точностью $10^{-4}$ (т.е. для получения четырехзначных таблиц Брадиса) достаточно взять $n = 3$. В самом деле, полагая $x = \pi/4$, $n = 3$, получаем:

$$|R_7(x)| \leqslant \frac{(\pi/4)^7}{7!} < 10^{-4}.$$

Следовательно, для любого $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ с точностью до $10^{-4}$ имеем:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Отметим, что чем ближе $x$ к нулю, тем большую точность дает эта приближенная формула; для $x$, достаточно близких к нулю, погрешность этой формулы существенно меньше, чем $10^{-4}$.

**Задание.** Постройте и сравните графики функций

$$f(x) = \sin x, \quad P_1(x) = x, \quad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

3) $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k+1, \\ (-1)^k, \quad \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, то общий член формулы Маклорена для $\cos x$ имеет вид

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1, \\ \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x),$$

где

$$R_{2n+2}(x) = o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{(форма Пеано)},$$

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos(\theta x + (2n+2)\pi/2)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad 0 < \theta < 1$$

(форма Лагранжа). Отсюда для любого фиксированного значения $x$ получаем оценку:

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{\left|x^{2n+2}\right|}{(2n+2)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для любого $x$ можно вычислить $\cos x$ с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора $P_n(x)$ для $\cos x$ с достаточно большим $n$.

**Задание.** Постройте и сравните графики функций

$$f(x) = \cos x, \; P_0(x) = 1, \; P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \; P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$
$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

### Связь между функциями $e^x$, $\sin x$, $\cos x$

Выпишем еще раз разложения по формуле Маклорена функций $e^x$, $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases} e^x \;\; = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots, \\ \sin x = \qquad x \qquad - \dfrac{x^3}{3!} \qquad + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots, \\ \cos x = 1 \qquad - \dfrac{x^2}{2!} \qquad + \dfrac{x^4}{4!} \qquad - \ldots. \end{cases}$$

Эти формулы наводят на мысль о том, что существует связь между экспонентой, синусом и косинусом.

Ответ лежит в области функций *комплексной переменной*:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} +$$

$$+ \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

Итак,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*.

4) $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x)}$, $x > -1$. Так как

$$f'(x) = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1 + x)^{-2},$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(1 + x)^{-3} = (-1)^2 2!(1 + x)^{-3}, \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n - 1)!}{(1 + x)^n},$$

то $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и общий член формулы Маклорена для $\ln(1 + x)$ имеет вид:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Поэтому

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{(форма Пеано)},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n + 1)(1 + \theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{(форма Лагранжа)}.$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда из формы Лагранжа для $R_{n+1}(x)$ получаем:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7.11}$$

Следовательно, для любого $x \in [0, 1]$ можно вычислить $\ln(1 + x)$ с произвольной точностью, если взять многочлен Тейлора для $\ln(1 + x)$ с достаточно большим $n$. В частности, при $x = 1$ имеем:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Используя оценку (7.11), нетрудно сосчитать, какое нужно взять $n$, чтобы вычислить $\ln 2$ с заданной точностью.

Докажем, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ также для любого $x \in (-1; 0)$. Воспользуемся интегральной формой остаточного члена:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

В данном случае $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(1 + t)^{n+1}}$, поэтому

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \int\limits_0^x \frac{(x - t)^n}{(1 + t)^{n+1}} dt \right|.$$

Так как $-1 < x < 0$, то

$$|R_{n+1}(x)| = \int\limits_x^0 \frac{(t - x)^n}{(1 + t)^{n+1}} dt \leqslant \frac{1}{1 + x} \int\limits_x^0 \left(\frac{t - x}{1 + t}\right)^n dt.$$

Поскольку

$$\frac{t - x}{1 + t} = 1 - \frac{1 + x}{1 + t} \leqslant 1 - (1 + x) = -x = |x| \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0,$$

то

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{1 + x} |x|^n \int\limits_x^0 dt = \frac{|x|^{n+1}}{1 + x}.$$

Отсюда следует, поскольку $|x| < 1$, что $\forall x \in (-1, 0)$ $|R_{n+1}(x)| \to \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оказывается, что $R_{n+1}(x) \not\to 0$ при $n \to \infty$, если $x > 1$. Это будет доказано в курсе ТФКП.

5) $\boldsymbol{f(x) = (1+x)^\alpha}$, $x > -1$, где $\alpha$ — произвольное вещественное число. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \text{то}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1), \quad f(0) = 1.$$

Поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = o\left(x^n\right) \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{(форма Пеано).}$$

Выпишите самостоятельно $R_{n+1}(x)$ в форме Лагранжа.

Можно доказать, что при любом фиксированном значении $x \in (-1, 1)$ $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. При $n = 1$ имеем:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ из разложения по формуле Маклорена получаем *формулу бинома Ньютона* (в этом случае $R_{n+1}(x) \equiv 0$).

Полученное разложение по формуле Маклорена можно использовать для приближенного вычисления корней.

**Пример.** Найти $\sqrt[5]{35}$ с заданной точностью.
Поскольку $32 = 2^5$, то

$$\sqrt[5]{35} = 2\sqrt[5]{\frac{35}{32}} = 2\left(1 + \frac{3}{32}\right)^{1/5} = \\ = 2\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{32}\right)^2 + \ldots\right).$$

Используя формулу для остаточного члена в форме Лагранжа, нетрудно оценить, сколько членов разложения нужно взять, чтобы получить приближенное значение $\sqrt[5]{35}$ с заданной точностью.

6) $\boldsymbol{f(x)=\operatorname{tg} x}$. Так как

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\quad f'''(x)=\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}+\frac{2}{\cos^2 x}.$$

$f^{(4)}(x)=\ldots$ (вычислите самостоятельно),

то

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{(4)}(0)=0.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right).$$

Эту формулу мы уже получили ранее, рассмотрев

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}.$$

Как получить следующие члены разложения функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена? (Отметим, что разложение будет содержать только нечетные степени $x$, поскольку $\operatorname{tg} x$ — нечетная функция).

1-й способ: найти $f^{(5)}(0)$, $f^{(7)}(0)$ и т.д. Но эта процедура достаточно громоздкая.

2-й способ: чтобы найти коэффициент при $x^5$, можно рассмотреть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x-x^3/3}{x^5}$$

и вычислить его, например, с помощью правила Лопиталя.

Если этот предел равен $K_5$, то

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+K_5\cdot x^5+o\left(x^6\right)\quad \text{при}\quad x\to 0.$$

3-й способ: воспользуемся равенством $\sin x=\cos x\cdot\operatorname{tg} x$ и формулами Маклорена для $\sin x$ и $\cos x$. Тогда

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+K_5\cdot x^5+K_7\cdot x^7+\ldots\right).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях равенства, находим $K_5$, $K_7$, и т.д. Вычислим $K_5$:

$$\frac{1}{5!} = K_5 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4!} \quad \Rightarrow \quad K_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right).$$

### Вычисление пределов с помощью формулы Маклорена

1) Будем использовать обозначение $\exp(t) = e^t$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)\right] = \exp\big(-1/6\big).$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^6\right) + 2\big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)\big) - 3x}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{2}{15} + \frac{1}{60})x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}.$$

3) Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \cos(\sin x)$ до члена с $x^6$ включительно. Имеем:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^4}{4!} - \frac{(\sin x)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^4 -$$

$$-\frac{1}{720}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^6 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^6}{60} + o\left(x^6\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{24}\left(x^4 + 4x^3\left(-\frac{x^3}{6} + \ldots\right) + o\left(x^6\right)\right) - \frac{1}{720}\left(x^6 + o\left(x^6\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{72} - \frac{1}{120} - \frac{1}{36} - \frac{1}{720}\right)x^6 + o\left(x^6\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + o\left(x^6\right).$$

Глава 8

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

В этой главе с помощью результатов и методов предыдущей главы мы рассмотрим различные вопросы, связанные с поведением функций и их графиками: вопрос о точках локального экстремума функции, о промежутках монотонности, о направлении выпуклости графика и точках перегиба, об асимптотах графика.

## § 1. Точки локального экстремума и промежутки монотонности функции

В предыдущей главе было введено понятие локального экстремума функции.

**Определение.** Говорят, что в точке $c$ функция $f(x)$ имеет *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки $c$, в которой $f(x) < f(c)$ (соответственно, $f(x) > f(c)$) при $x \neq c$.

Там же была доказана теорема о необходимом условии локального экстремума дифференцируемой функции: *если $f(x)$ дифференцируема в точке $c$ и имеет в точке $c$ локальный экстремум, то* $f'(c) = 0$. Было отмечено, что условие $f'(c) = 0$ является только необходимым, но не достаточным условием локального экстремума дифференцируемой функции. Например, функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет условию $f'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ экстремума не имеет. Отметим также, что условие $f'(c) = 0$ является необходимым условием экстремума только для дифференцируемой в точке $c$ функции. Иными словами, функция $f(x)$ может иметь в точке $c$ экстремум, но при этом не быть дифференцируемой в этой точке, и потому условие $f'(c) = 0$ не выполнено. Например, функция $f(x) = |x|$ имеет минимум в точке $x = 0$, но условие $f'(0) = 0$ не выполнено, поскольку $f'(0)$ не существует.

Будем называть *точками возможного экстремума* функции $f(x)$ точки двух типов:

1) точки $c$, в которых $f'(c) = 0$;

2) точки $c$, в которых $f'(c)$ не существует, но сама функция $f(x)$ непрерывна в точке $c$.

Отыскав точки возможного экстремума, мы должны далее проверить с помощью каких-то условий, являются ли они на самом деле точками экстремума или нет. Этой цели служат достаточные условия экстремума.

**Теорема 1 (1-ое достаточное условие экстремума).** Пусть $c$ — точка возможного экстремума функции $f(x)$ и пусть $f(x)$ является дифференцируемой в некоторой проколотой окрестности точки $c$. Тогда если в указанной окрестности:

1)
$$\begin{cases} f'(x) > 0 (< 0) & \text{при } x < c, \\ f'(x) < 0 (> 0) & \text{при } x > c, \end{cases}$$
то в точке $c$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум);

2) $f'(x)$ одного знака при $x < c$ и при $x > c$, то в точке $c$ экстремума нет.

Доказательство.

1) Рассмотрим случай, когда
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < c, \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > c, \end{cases}$$
и докажем, что в точке $c$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум. Для этого достаточно доказать, что в указанной окрестности точки $c$ $f(x) < f(c)$ при $x \neq c$, или $f(x) - f(c) < 0$ при $x \neq c$.

Возьмем произвольное $x$ из указанной окрестности, не равное $c$. Тогда $f(x)$ непрерывна на сегменте $[c, x]$ и дифференцируема в интервале $(c, x)$. По формуле Лагранжа
$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c).$$
Если $x < c$, то $\xi < c$, $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$ и, следовательно, $f(x) - f(c) < 0$. Если $x > c$, то $\xi > c$, $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$ и, следовательно, $f(x) - f(c) < 0$. Итак, в указанной окрестности точки $c$ выполняется неравенство $f(x) - f(c) < 0$ при $x \neq c$, что и требовалось доказать.

2) Пусть $f'(x)$ одного знака при $x < c$ и при $x > c$. Тогда из формулы Лагранжа следует, что в указанной окрестности $f(x) - f(c)$ имеет разные знаки при $x < c$ и при $x > c$, и, следовательно, в точке $c$ экстремума нет. Теорема 1 доказана.

**Примеры.**

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 1$. Имеем:
$$f'(x) = x^2 - 5x + 6; \quad f'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 2 \quad \text{и} \quad x = 3.$$

При «переходе» через точку $x = 2$ производная меняет знак с плюса на минус, а при «переходе» через точку $x = 3$ — с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x = 2$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум, а в точке $x = 3$ — локальный минимум.

2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 - \sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум. Вычислим ее производную:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 2x\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В любой сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$, как слева, так и справа от этой точки, $f'(x)$ имеет значения разных знаков (докажите это). Этот пример показывает, что , изменение знака производной при переходе через точку $c$ — только достаточное, но не необходимое условие экстремума функции в точке $c$.

**Теорема 2 (2-ое достаточное условие экстремума).** Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $c$ и пусть $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Тогда если $f''(c) < 0$ $(> 0)$, то в точке $c$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум).

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0$ (случай $f''(c) < 0$ рассматривается аналогично). Тогда $f'(x)$ возрастает в точке $c$, т.е. существует такая окрестность точки $c$, в которой $f'(x) > f'(c) = 0$ при $x > c$ и $f'(x) < f'(c) = 0$ при $x < c$. По теореме 1 функция $f(x)$ имеет в точке $c$ локальный минимум. Теорема 2 доказана.

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = x + \sin 2x$. Имеем:

$$f'(x) = 1 + 2\cos 2x = 0,$$

если

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

так как $f''(x) = -4\sin 2x$, то

$$f''\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = -4\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) < 0,$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = -4\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) > 0.$$

Таким образом, согласно теореме 2, в точках $x = \pi/3 + \pi n$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум, а в точках $x = -\pi/3 + \pi n$ — локальный минимум.

В предыдущей главе была доказана теорема: *для того, чтобы дифференцируемая на промежутке $X$ функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X$ выполнялось неравенство* $f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$. Было отмечено, что для строгого возрастания (убывания) функции $f(x)$ на промежутке $X$ достаточно (но не необходимо), чтобы $\forall x \in X$: $f'(x) > 0 (< 0)$.

Таким образом, для отыскания промежутков монотонности дифференцируемой функции $f(x)$ нужно найти промежутки знакопостоянства $f'(x)$, а для этого нужно найти точки, в которых $f'(x) = 0$, и точки, в которых $f'(x)$ разрывна. Тем самым можно одновременно найти точки локального экстремума.

**Пример.** $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{7}{3}x^3 + 6x^2 + 1$. Так как

$$f'(x) = x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-3)(x-4),$$

то $f'(x) < 0$ на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(3, 4)$; $f'(x) > 0$ на промежутках $(0, 3)$ и $(4, +\infty)$. Поэтому $f(x)$ убывает на промежутках$(-\infty, 0)$ и $(3, 4)$ и возрастает на промежутках $(0, 3)$ и $(4, +\infty)$. При этом точка $x = 3$ является точкой локального максимума, а точки $x = 0$ и $x = 4$ — точками локального минимума функции $f(x)$.

## § 2. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда в каждой точке $M(x, f(x))$ существует касательная к графику функции, причем эта касательная не параллельна оси $Oy$.

**Определение.** Говорят, что график функции $y = f(x)$ направлен на интервале $(a, b)$ *выпуклостью вверх (вниз)*, если в пределах интервала $(a, b)$ график лежит не выше (не ниже) любой своей касательной (рис. 8.1).

**Теорема 3.** Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $\forall x \in (a, b)$: $f''(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$, то график функции $y = f(x)$ направлен на $(a, b)$ выпуклостью вниз (вверх).

Доказательство. Рассмотрим случай $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in (a, b)$. Пусть $c$ —произвольная точка из $(a, b)$. Проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(c, f(c))$. Уравнение касательной имеет вид

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \text{или} \quad Y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

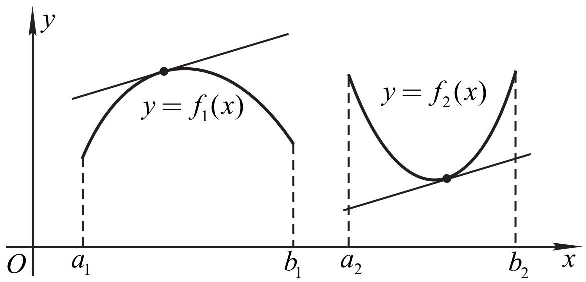



*График функции $y = f_1(x)$ направлен выпуклостью вверх, а график функции $y = f_2(x)$ – выпуклостью вниз.*

Рис. 8.1.

Требуется доказать, что график функции $y = f(x)$ лежит на интервале $(a, b)$ не ниже касательной, то есть $\forall x \in (a, b)$: $f(x) \geqslant Y$.

Пусть $x$ — произвольная точка из интервала $(a, b)$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2, \quad \xi \in (c, x).$$

Следовательно,

$$f(x) - Y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2,$$

а так как $f''(\xi) \geqslant 0$ $(\forall \xi \in (a, b))$, то $f(x) - Y \geqslant 0$, то есть $f(x) \geqslant Y$, что и требовалось доказать.

Замечание. Тот факт, что знак $f''(x)$ определяет направление выпуклости, нетрудно усмотреть непосредственно. Если $f''(x) > 0$, то $f'(x)$ возрастает и, следовательно, касательная к графику функции $y = f(x)$ при движении по графику в направлении возрастания $x$ поворачивается так, что сам график оказывается не ниже касательной. Это можно увидеть на рисунке (8.1), если провести несколько касательных к графику функции.

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$. Имеем:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

Отсюда следует, что $f'(x) > 0$ при $x < 0$ и при $x > 2$; $f'(x) < 0$ при $0 < x < 2$, $f''(x) < 0$ при $x < 1$, $f''(x) > 0$ при $x > 1$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает при $x < 0$ и при $x > 2$, убывает при $0 < x < 2$, а график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вверх при $x < 1$ и выпуклостью вниз при $x > 1$ (рис. 8.2). В точке $M(1; -2)$ происходит изменение направления выпуклости. Такую точку будем называть *точкой перегиба* графика функции.

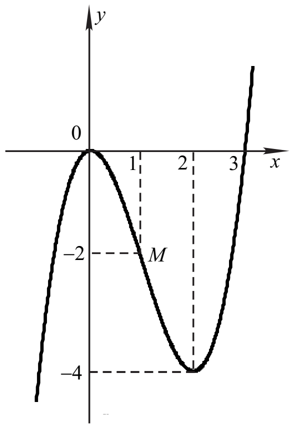


Рис. 8.2.

**Определение.** Точка $M(a, f(a))$ графика функции $y = f(x)$ называется *точкой перегиба* графика, если:

1) в точке $M$ существует касательная к графику;

2) существует такая окрестность точки $a$, в которой слева и справа от точки $a$ график имеет различные направления выпуклости.

Говорят также, что в точке *$M$ график функции имеет перегиб.*

**Теорема 4 (необходимое условие перегиба).** Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $a$ непрерывную вторую производную и график этой функции имеет в точке $M(a, f(a))$ перегиб, то $f''(a) = 0$.

Доказательство. Предположим противное, то есть $f''(a) \neq 0$. Пусть $f''(a) > 0$ (случай $f''(a) < 0$ рассматривается аналогично).

В силу устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки $a$, в которой $f''(a) > 0$ и, следовательно, по теореме 3 график функции направлен выпуклостью вниз как слева, так и справа от точки $a$, что противоречит перегибу графика в точке $M(a, f(a))$. Полученное противоречие доказывает, что $f''(a) = 0$. Теорема 4 доказана.

Замечание. Условие $f''(a) = 0$ является только *необходимым*, но *не достаточным* условием перегиба графика функции в точке $M(a, f(a))$. Например, функция $f(x) = x^4$ удовлетворяет в точке $x = 0$ условию $f''(0) = 0$, но в точке $M(0, 0)$ перегиба графика функции $y = x^4$ нет, поскольку $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$, и, следовательно, график направлен выпуклостью вниз на всей прямой.

Назовем *точками возможного перегиба графика функции* $y = f(x)$ такие точки $M(a, f(a))$, для которых либо $f''(a) = 0$, либо $f''(a)$ не существует, но существует касательная к графику функции в точке $M(a, f(a))$.

Для дальнейшего исследования точек возможного перегиба требуются достаточные условия перегиба графика функции.

**Теорема 5 (первое достаточное условие перегиба).** Пусть точка $M(a, f(a))$ является точкой возможного перегиба графика функции $y = f(x)$ и пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки $a$. Тогда если в указанной окрестности слева и справа от точки $a$ $f''(x)$ имеет разные знаки, то в точке $M(a, f(a))$ график функции $y = f(x)$ имеет перегиб.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что в указанной окрестности слева и справа от точки $a$ график функции $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости и, следовательно, $M(a, f(a))$ — точка перегиба графика. Теорема 5 доказана.

**Примеры.**

1) $y = x^4 - 2x^3$. Имеем:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3), \; f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1).$$

Так как $f''(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$ и при переходе через каждую из этих точек $f''(x)$ меняет знак, то, согласно теореме 5, точки $M_1(0; 0)$ и $M_2(1; -1)$ являются точками перегиба графика функции $y = x^4 - 2x^3$.

**Задание.** Постройте график этой функции.

2) $y = \sqrt[3]{x}$. Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0.$$

Ясно, что $f''(x)$ не существует в точке $x = 0$ и имеет разные знаки при $x < 0$ и при $x > 0$. В точке $O(0, 0)$ существует касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ (касательной является ось $Oy$). Следовательно, точка $O(0, 0)$ является точкой перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x}$.

3) рассмотрим функцию $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x^2, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Докажите, что $f''(0)$ не существует, но точка $O(0, 0)$ является точкой перегиба графика данной функции.

**Теорема 6 (второе достаточное условие перегиба).** Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в окрестности точки $a$ и третью производную в самой точке $a$, причем $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, то график функции $y = f(x)$ имеет в точке $M(a, f(a))$ перегиб.

Доказательство. Пусть $f'''(a) > 0$ (случай $f'''(a) < 0$ рассматривается аналогично). Тогда $f''(x)$ возрастает в точке $a$, то есть существует такая окрестность точки $a$, в которой $f''(x) < f''(a) = 0$ при $x < a$ и $f''(x) > f''(a) = 0$ при $x > a$. Таким образом, $f''(x)$ в указанной окрестности имеет разные знаки слева и справа от точки $a$. По теореме 5 точка $M(a, f(a))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$. Теорема 6 доказана.

**Пример.** $y = x^2 + \cos 2x$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 2x - 2\sin 2x,\\
&f''(x) = 2 - 4\cos 2x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},\\
&f'''(x) = 8\sin 2x, \quad f'''\left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi n\right) = 8\sin\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, в точках

$$
M_n^{\pm}\left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi n\right)^2 + 1/2\right)
$$

график данной функции имеет перегибы.

## § 3. Асимптоты графика функции

**Определение.** Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$
\lim_{x\to a-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)
$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

**Примеры.**

1) $y = 1/x$. Прямая $x = 0$ (ось $Oy$) является вертикальной асимптотой графика данной функции, поскольку

$$
\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty.
$$

2) $y = 2^{1/(x-1)}$. Прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота графика этой функции (рис. 8.3), так как

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

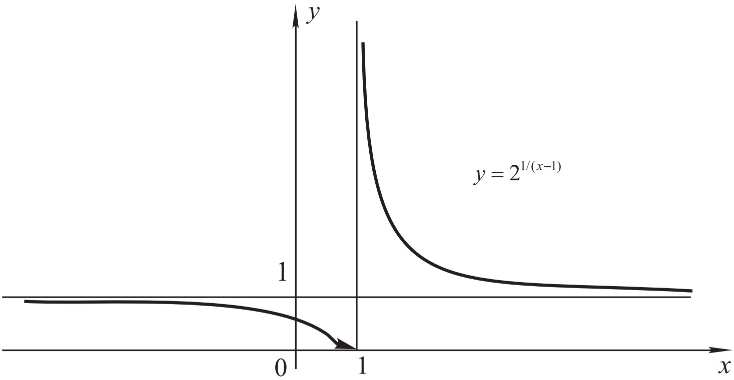



Рис. 8.3.

Отметим, что

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0.$$

Заметим, что прямая $y = 1$ также является асимптотой графика функции, но это асимптота другого типа.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на полупрямой $(a, +\infty)$.

**Определение.** Прямая $Y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, то есть

$$\lim_{x\to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Аналогично определяется наклонная асимптота графика функции при $x \to -\infty$.

**Пример.**

$$y = \frac{x^2 + \sin x}{x}.$$

Так как
$$\frac{x^2+\sin x}{x} = x + \frac{\sin x}{x} = x + \alpha(x),$$
где $\alpha(x) = \sin x/x$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$ (и также при $x \to -\infty$), то прямая $Y = x$ — наклонная асимптота графика данной функции при $x \to +\infty$ (и также при $x \to -\infty$).
**Задание.** Изобразите график этой функции.

**Теорема 7.** Для того, чтобы прямая $Y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\big[f(x) - kx\big] = b.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть прямая $Y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то есть
$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$
где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big[f(x) - kx\big] = \lim_{x\to+\infty}\big[b + \alpha(x)\big] = b,$$
что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть существуют пределы
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\big[f(x) - kx\big] = b.$$
Положим $\alpha(x) = f(x) - kx - b$. Тогда
$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty}\big[f(x) - kx - b\big] = 0.$$
Таким образом, $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to + +\infty$. Это и означает по определению, что прямая $Y = kx + b$ — наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Теорема 7 доказана.

**Примеры.**

1) Рассмотрим *гиперболу,* заданную уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Возьмем ее ветвь, лежащую в 1-ом квадранте:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,, \quad \text{здесь} \quad f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,, \quad x \geqslant a.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

Таким образом, прямая

$$Y = \frac{b}{a}x$$

является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Аналогично рассматриваются 3 другие ветви гиперболы, каждая из которых имеет асимптоту.

2) Рассмотрим *параболу,* заданную уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Возьмем ее ветвь, лежащую в 1-ом квадранте:

$$y = \sqrt{2px}\,, \quad x \geqslant 0.$$

Докажите, что эта ветвь параболы не имеет асимптоты при $x \to +\infty$ (аналогично, не имеет асимптоты при $x \to +\infty$ и другая ветвь).

## § 4. Построение графиков функций

Общая схема исследования поведения функции $y = f(x)$ и построения ее графика.

1) Находим область определения функции $y = f(x)$.

2) Находим асимптоты графика функции.

3) Находим промежутки монотонности и точки локального экстремума функции (с помощью $f'(x)$).

4)Находим промежутки, на которых сохраняется направление выпуклости графика функции, и точки перегиба графика (с помощью $f''(x)$).

5) Исследуем другие особенности графика функции (точки пересечения графика с осями координат, четность или нечетность $f(x)$, периодичность $f(x)$, оси симметрии графика и т.д.) 6) Строим график функции, опираясь на результаты исследования.

**Пример.** $y = x^2e^{-x}$.

1) Область определения: $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

2) Асимптоты: а) вертикальных нет, поскольку $f(x) = x^2 e^{-x}$ непрерывна во всех точках; б) наклонные:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = 0 \Rightarrow k = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - kx\big] = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Итак, $y = 0$(ось $Ox$) — асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

Наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ нет, поскольку

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = -\infty.$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty.$$

3) Промежутки монотонности и точки локального экстремума функции.

Так как

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x},$$

то

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } 0 < x < 2, \quad f'(x) < 0 \text{ при } x < 0 \text{ и при } x > 2.$$

Следовательно, $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty, 0]$ и $[2, +\infty)$ и возрастает на интервале $(0, 2)$. Поэтому $x = 0$ — точка локального минимума, а $x = 2$ — точка локального максимума функции, и $f_{\min}(0) = 0$, $f_{\max}(2) = 4e^{-2} < 1$.

4) Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.

Так как

$$f''(x) = \left(2 - 4x + x^2\right) e^{-x}; \text{ то } \quad f''(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 2 \pm \sqrt{2},$$

$f''(x) > 0$ при $x < 2 - \sqrt{2}$ и при $x > 2 + \sqrt{2}$, $f''(x) < 0$ при $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Следовательно, график функции направлен выпуклостью вниз на промежутках $\left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right)$ и $\left(2 + \sqrt{2}, +\infty\right)$ и выпуклостью вверх на интервале

$\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$. Таким образом, точки $M_1$ и $M_2$ графика с абсциссами $2-\sqrt{2}$ и $2+\sqrt{2}$ являются точками перегиба. График функции представлен на рисунке 8.4.

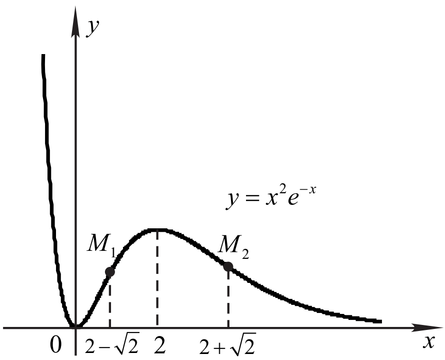



Рис. 8.4.

## § 5. Приближенное вычисление корней уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0. \tag{8.1}$$

Число $c$ называется *корнем* уравнения (8.1) если $f(c) = 0$. Мы будем рассматривать только вещественные корни.

Корень $c$ называется *изолированным* корнем уравнения (8.1), если существует такой сегмент $[a, b]$, что $a < c < b$ и на $[a, b]$ нет других корней этого уравнения.

В большинстве случаев точное значение корня $c$ найти не удается. Например, уравнение

$$x + \sin x - 2 = 0$$

имеет ровно 1 корень, но точное значение этого корня — иррациональное число, поэтому можно найти только приближенное значение корня.

Мы будем рассматривать *методы приближенного вычисления изолированных корней* уравнения (8.1). В каждом из методов будет строиться последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к $c$, где $c$ — изолированный корень уравнения. Члены этой последовательности и будут приближенными значениями корня $c$.

### Метод «вилки»

Пусть выполнены следующие условия:
а) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$;
б) $f(a)f(b) < 0$ (в этом случае сегмент $[a,b]$ называется «вилкой»);
в) на $[a,b]$ имеется только один корень уравнения (8.1).

Метод «вилки» — это метод приближенного вычисления корня с помощью процедуры деления сегментов пополам.

Пусть ради определенности $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим сегмент $[a,b]$ пополам: либо $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$ и тогда найдено точное значение корня $\left(c = \dfrac{a+b}{2}\right)$, либо $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \neq 0$ и тогда одна из половин сегмента $[a,b]$ образует вилку, которую обозначим $[a_1,b_1]$. При этом $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Далее разделим сегмент $[a_1,b_1]$ пополам и т.д. Либо на некотором шаге получим точное значение корня (если середина очередного сегмента совпадет с корнем), либо процесс продолжится неограниченно. Во втором случае получим *стягивающуюся систему вилок*

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ \ldots,\ [a_n,b_n],\ \ldots,$$

причем $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. По теореме о стягивающейся системе сегментов существует единственная точка $c \in [a_n,b_n]\ \forall n$, причем $\{a_n\} \to c$ и $\{b_n\} \to c$. В силу непрерывности $f(x)$ последовательности $\{f(a_n)\}$ и $\{f(b_n)\}$ сходятся к $f(c)$, а в силу неравенств $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$ имеем:

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant 0, \quad f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geqslant 0.$$

Следовательно, $f(c) = 0$, т.е. *последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся к корню уравнения* (8.1).

В качестве приближенного значения корня $c$ можно брать как $a_n$ или $b_n$, так и $(a_n+b_n)/2$. Оценка погрешности:

$$|a_n - c| \leqslant |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n},$$

$$|b_n - c| \leqslant |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n},$$

$$\left|\frac{a_n+b_n}{2} - c\right| \leqslant \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

### Метод последовательных приближений (метод итераций)

Уравнение (8.1)

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, эквивалентно на этом сегменте уравнению

$$x = F(x), \tag{8.2}$$

где $F(x) = x + k(x)f(x)$, $k(x)$ — произвольная непрерывная функция, не равная нулю в точках сегмента $[a, b]$.

Вместо уравнения (8.1) будем рассматривать уравнение (8.2). Для нахождения приближенных значений корня применим метод, который называется *методом последовательных приближений (или методом итераций)*.

Пусть $x_0 \in [a, b]$. Положим $x_1 = F(x_0)$. Если $x_1 \in [a, b]$, то положим $x_2 = F(x_1)$, и т.д. Если $x_n \in [a, b]$, то положим

$$x_{n+1} = F(x_n). \tag{8.3}$$

Отметим, что при этом $F(x_n) = x_n + k(x_n)f(x_n)$. Последовательность $\{x_n\}$, определенная таким образом, называется *итерационной последовательностью*.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому числу $c$. Тогда в силу непрерывности $F(x)$ $\{F(x_n)\} \to F(c)$. Переходя к пределу при $n \to +\infty$ в равенстве (8.3), получим

$$c = F(c),$$

т.е. число $c$ является корнем уравнения $x = F(x)$, и, следовательно, корнем уравнения $f(x) = 0$.

Итак, *если итерационная последовательность сходится, то она сходится к корню уравнения (8.1), и потому ее члены $x_n$ служат приближенными значениями корня.*

Возникает вопрос: при каких условиях итерационная последовательность сходится?

**Теорема 8.** Пусть:

1) $c$ — корень уравнения $x = F(x)$, т.е. $c = F(c)$;

2) $F(x)$ дифференцируема в некоторой $\varepsilon$-окрестности точки $c$, причем $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$ $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, где $\alpha$ — некоторое положительное число;

3) $x_0$ — произвольное число из интервала $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Тогда итерационная последовательность существует и сходится к $c$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что все $x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Это и будет означать, что последовательность $\{x_n\}$ существует.

По условию $x_0 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Допустим, что

$$x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon), \text{ т.е. } |x_n - c| < \varepsilon.$$

Тогда $x_{n+1} = F(x_n)$. Вычитая из этого равенства равенство $c = F(c)$ и применяя формулу Лагранжа, получаем

$$x_{n+1} - c = F(x_n) - F(c) = F'(\xi)(x_n - c).$$

Отсюда следует, что

$$|x_{n+1} - c| = |F'(\xi)| \cdot |x_n - c| \leqslant \alpha |x_n - c| \leqslant |x_n - c|, \tag{8.4}$$

и, следовательно, $x_{n+1} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Остается доказать, что $\{x_n\} \to c$. Применяя неравенство (8.4) последовательно несколько раз и учитывая, что $0 < \alpha < 1$, получаем:

$$|x_n - c| \leqslant \alpha |x_{n-1} - c| \leqslant \alpha^2 |x_{n-2} - c| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n |x_0 - c| \to 0$$

при $n \to +\infty$. Поэтому $\{x_n\} \to c$ при $n \to +\infty$. Теорема 8 доказана.

Оценка погрешности. Так как $|x_n - c| \leqslant \alpha^n |x_0 - c|$, то чем больше $n$, тем меньше $x_n$ отличается от $c$. Удачный выбор $x_0$ (нулевого приближения) также важен.

Выбирая различные функции $k(x) \neq 0$ в выражении

$$F(x) = x + k(x) f(x),$$

будем получать различные уравнения вида (8.2), эквивалентные уравнению (8.1). Мы рассмотрим два специальных выбора функции $k(x)$, которые соответствуют *методу хорд* и *методу касательных*.

### Метод хорд

Снова рассматриваем уравнение (8.1):

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Изобразим график функции $f(x)$ и дадим *геометрическую интерпретацию метода хорд* (рис. 8.5). Отметим какую-нибудь точку $x_0$ на отрезке $[a, b]$. Ей соответствует точка $A_0$ на гра-

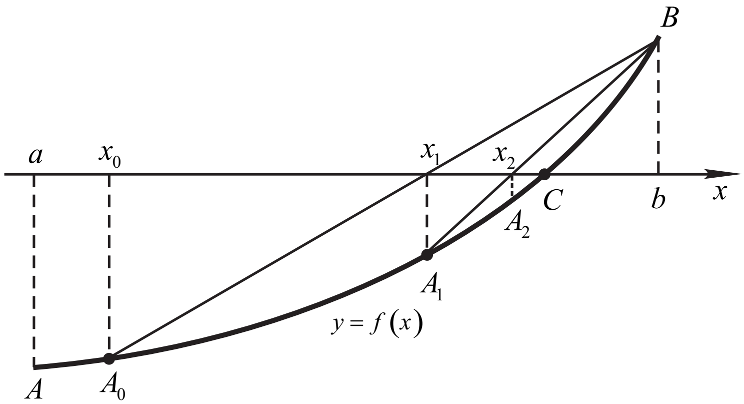



Рис. 8.5.

фике функции $y = f(x)$. Проведем отрезок $A_0B$, он называется *хордой*. Хорда $A_0B$ пересекается с осью $x$ в точке $x_1$, которой соответствует точка $A_1$ на графике функции. Проведя хорду $A_1B$, получим точку $x_2$ на оси $x$ и т.д. В результате получается последовательность $\{x_n\}$.

Выведем рекуррентную формулу, выражающую $x_{n+1}$ через $x_n$. С этой целью напишем уравнение прямой, проходящей через точки $A_n(x_n; f(x_n))$ и $B(b; f(b))$ (рис. 8.6):

$$\frac{Y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}.$$

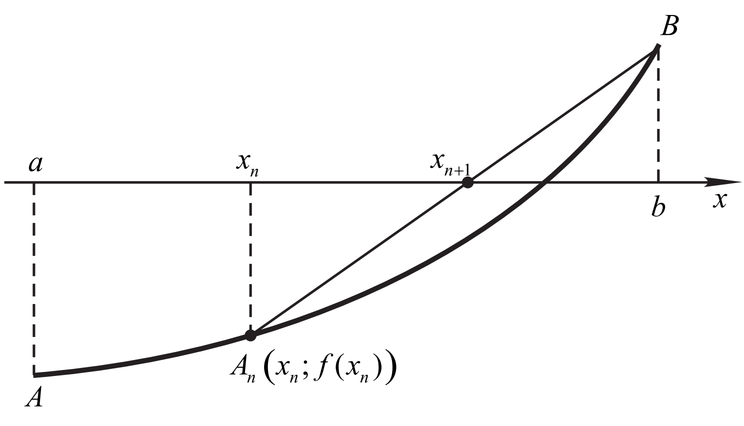



Рис. 8.6.

Положим в этом уравнении $x = x_{n+1}$, тогда $Y = 0$, и мы получаем *рекуррентную формулу метода хорд:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \tag{8.5}$$

Метод хорд является методом итераций, где

$$k(x) = -\frac{b - x}{f(b) - f(x)},$$

а итерационная последовательность $\{x_n\}$ определяется *рекуррентной формулой* (8.5).

При каких условиях итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню $c$ уравнения $f(x) = 0$? Ответ дает следующая теорема.

**Теорема 9.** Пусть:
1) $c$ — изолированный корень уравнения (8.1) на сегменте $[a, b]$: $f(c) = 0$;
2) функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ производные $f'(x)$ и $f''(x)$, каждая из которых имеет определенный знак во всех точках $[a, b]$. Будем ради определенности рассматривать случай, когда $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на сегменте $[a, b]$.

Тогда если взять $x_0 = a$, то последовательность $\{x_n\}$, определенная формулой (8.5), сходится к корню $c$.

Доказательство. Так как $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$ и, следовательно, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Поскольку $f''(x) > 0$ на $[a, b]$, то график направлен выпуклостью вниз и потому лежит ниже хорды $AB$ (см. рис. 8.5). Отсюда следует, что $x_0 < x_1 < c$, $f(x_1) < 0$. На сегменте $[x_1, b]$ график функции $y = f(x)$ также лежит ниже хорды $A_1B$, а хорда $A_1B$ — ниже хорды $AB$, и поэтому $x_1 < x_2 < c$. И так далее. Для любого номера $n$ выполняются неравенства

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < c,$$

т.е. $\{x_n\}$ — монотонная ограниченная последовательность. Следовательно, она сходится, а поскольку это — итерационная последовательность, то она сходится к корню $c$ уравнения $f(x) = 0$. Теорема 9 доказана.

Замечание 1. Тот факт, что $\{x_n\} \to c$, можно установить и непосредственно с помощью формулы (8.5). В самом деле, пусть $\{x_n\} \to c'$. Переходя в равенстве (8.5) к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$c' = c' - \frac{(b - c')f(c')}{f(b) - f(c')},$$

откуда следует, что $f(c') = 0$ и, следовательно, $c' = c$.

Замечание 2. Мы рассмотрели случай,когда $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. В случае, когда $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, нужно использовать ту же рекуррентную формулу (8.5), а в случаях $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ и $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ нужно $a$ и $b$ поменять ролями, то есть итерационная последовательность имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a - x_n)f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}, \quad x_0 = b.$$

### Метод касательных (метод Ньютона)

Мы вновь рассматриваем уравнение (8.1):

$$f(x) = 0.$$

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим геометрическую иллюстрацию метода касательных. Проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $B_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 8.7). Она пересекается с осью $x$ в точке $x_1$. Проведем теперь касательную к графику функции в точке $B_1(x_1, f(x_1))$. Получим на оси $x$ точку $x_2$. И так далее.

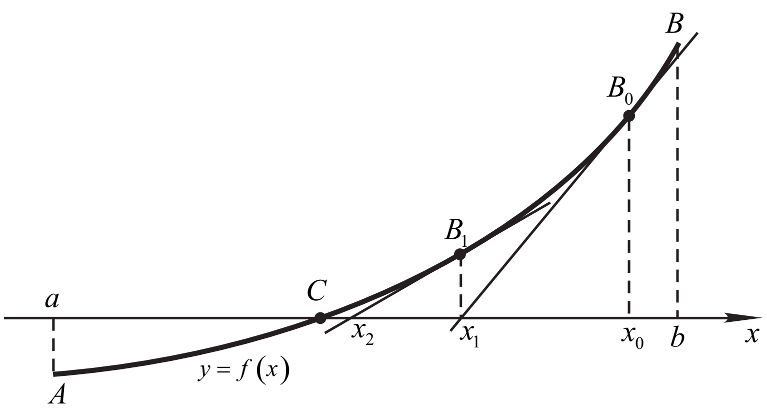



Рис. 8.7.

Напишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $B_n(x_n, f(x_n))$:

$$Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Полагая $x = x_{n+1}$ и учитывая, что при этом $Y = 0$ (рис. 8.8), приходим к *рекуррентной формуле метода касательных*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{8.6}$$

Метод касательных является методом итераций, где

$$k(x) = -\frac{1}{f'(x)},$$

а последовательность $\{x_n\}$, определяемая рекуррентной формулой (8.6), является итерационной последовательностью.

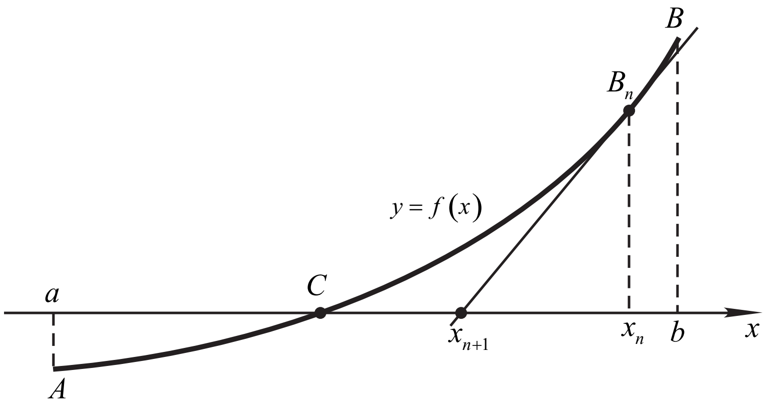



Рис. 8.8.

Заметим, что если взять $x_0$ близко к точке $a$, то $x_1$ может оказаться вне сегмента $[a, b]$ и итерационный процесс прервется. Как выбирать $x_0$? Ответ содержится в следующей теореме.

**Теорема 10.** Пусть выполнены условия теоремы 9 (рассматриваем случай, когда $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ на $[a, b]$).

Тогда если взять $x_0 = b$, то последовательность $\{x_n\}$, определенная формулой (8.6), сходится к корню $c$.

Доказательство. Так как $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$, в частности, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, а поскольку $f''(x) > 0$, то график функции направлен выпуклостью вниз и, следовательно, лежит не ниже любой касательной. Отсюда следует, что $x_1 > c$, а из формулы (8.6) получаем:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b = x_0.$$

Итак, $c < x_1 < x_0$.

Далее аналогично получаем, что для любого номера $n$

$$c < x_n < \ldots < x_1 < x_0,$$

т.е. $\{x_n\}$ — монотонная ограниченная последовательность. Следовательно, $\{x_n\}$ сходится, а так как эта последовательность является итерационной, то

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c.$$

Теорема 10 доказана.

Замечание 1. В случаях $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ и $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ нужно брать $x_0 = a$, а в случае $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ нужно брать $x_0 = b$.

Замечание 2. Метод касательных — наиболее эффективный метод из рассмотренных нами.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$x^2 - a = 0, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Оно имеет 2 изолированных корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Для отыскания корня $\sqrt{a}$ применим метод касательных. Так как $f'(x) = 2x$, то по формуле (8.6) получаем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad x_0 > 0.$$

Пусть $a = 25$. Тогда $\sqrt{a} = 5$.

Возьмем $x_0 = 10$. Тогда

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(10 + \frac{25}{10}\right) = 6,25;$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(6,25 + \frac{25}{6,25}\right) = 5,125.$$

Таким образом, начав с весьма далекого от $\sqrt{a} = 5$ значения $x_0 = 10$, мы уже на второй итерации получаем хорошую точность: $x_2 - \sqrt{a} = 0,125$. Оказывается, что

$$x_3 \approx 5,002, \text{ а } x_4 \approx 5 + 2\cdot 10^{-7}.$$

# Список литературы


1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2009.
2. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М.: Дрофа, 2006.
3. С.М. Никольский. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
4. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин Математический анализ в вопросах и задачах. СПб.: Лань, 2008.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2009.